II Prova in Itinere di Sistemi ad Eventi Discreti - 26.01.2010

I turno

Esercizio 1

Un piccolo (disorganizzato...) negozio di informatica mantiene in magazzino una scorta di al massimo tre notebook. La domanda settimanale D di notebook segue una distribuzione di Poisson

$$P(D = n) = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-\lambda}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

con $\lambda = 0.8$. La domanda in eccesso rispetto alla disponibilità non viene soddisfatta. Il proprietario del negozio effettua una ricognizione inventariale ogni lunedì mattina, ed esegue un ordine di tre notebook solo se la scorta si è esaurita. La consegna dell'ordine avviene il lunedì successivo (quindi per una settimana il negozio non dispone di notebook per la vendita...).

1. Modellare la dinamica delle scorte del magazzino mediante una catena di Markov omogenea a tempo discreto. Assumere che inizialmente la scorta sia massima.
2. Determinare la distribuzione di probabilità e il valore atteso del tempo di ricorrenza dello stato con scorte esaurite. Classificare tale stato come transitorio, ricorrente nullo o ricorrente positivo.
3. Calcolare la percentuale di settimane, a regime, in cui il negozio non dispone di notebook per la vendita, stabilendo la relazione numerica che intercorre con la soluzione al punto 2.

Esercizio 2

Un'enzima può trovarsi in tre stati: 0, quando è inibito (la sua capacità di legarsi al substrato è bloccata); 1, quando non è inibito e non è legato al substrato; 2, quando è legato al substrato. Si indichi con $V(0)$, $V(1)$ e $V(2)$ il tempo in cui l'enzima si trova in ciascuno dei tre stati. Trascorso $V(0)$ nello stato 0, l'enzima passa nello stato 1. Nello stato 1, l'enzima si lega al substrato dopo il tempo $V(1)$. Trascorso $V(2)$ nello stato 2, l'enzima può trovarsi con probabilità p nello stato 0 (inibizione da substrato), altrimenti si trova nello stato 1.

1. Discutere sotto quali condizioni il funzionamento dell'enzima è modellabile mediante una catena di Markov omogenea a tempo continuo, e definire tale catena.

Esercizio 3

Una stazione di lavorazione è costituita da due macchinari in parallelo identici e da un magazzino di capacità unitaria. I pezzi grezzi arrivano alla stazione di lavorazione come generati da un processo di Poisson con tasso 0.7 arrivi/min, mentre i tempi di lavorazione nei due macchinari seguono una distribuzione generica con valore atteso 1.8 min. Da misurazioni effettuate sul sistema risulta che, a regime, la frequenza effettiva di pezzi in uscita dalla stazione di lavorazione è 0.5 pezzi/min, mentre la probabilità che entrambi i serventi siano occupati è 0.3.

1. Determinare il vettore delle probabilità stazionarie dello stato del sistema.

II turno

Esercizio 1

Una piccola biblioteca mantiene tre copie del best-seller di un celebre autore. Ogni settimana, il numero D di richieste di prestito di copie di tale libro segue una distribuzione di Poisson

$$P(D = n) = \frac{\mu^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-\mu}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

con $\mu = 0.6$. Le richieste in eccesso rispetto alle copie disponibili non vengono soddisfatte. Il bibliotecario effettua una ricognizione dei prestiti ogni lunedì mattina, e richiama tutte e tre le copie del libro dal prestito solo se la disponibilità si è esaurita. La riconsegna delle copie avviene il lunedì successivo (quindi per una settimana la biblioteca non dispone di copie del libro per il prestito...).

1. Modellare la dinamica del numero di copie del libro disponibili per il prestito mediante una catena di Markov omogenea a tempo discreto. Assumere che inizialmente la disponibilità sia massima.

2. Determinare la distribuzione di probabilità e il valore atteso del tempo di ricorrenza dello stato con disponibilità esaurita. Classificare tale stato come transitorio, ricorrente nullo o ricorrente positivo.

3. Calcolare la frazione di settimane, a regime, in cui la biblioteca non dispone di copie del libro per il prestito, stabilendo la relazione numerica che intercorre con la soluzione al punto 2.

Esercizio 2

Un'enzima può trovarsi in tre stati: 0, quando è inibito (la sua capacità di legarsi al substrato è bloccata); 1, quando non è inibito e non è legato al substrato; 2, quando è legato al substrato. Si indichi con $V(0)$, $V(1)$ e $V(2)$ il tempo in cui l'enzima si trova in ciascuno dei tre stati. Trascorso $V(0)$ nello stato 0, l'enzima passa nello stato 1. Nello stato 1, l'enzima si lega al substrato dopo il tempo $V(1)$. Trascorso $V(2)$ nello stato 2, l'enzima può trovarsi con probabilità q nello stato 0 (inibizione da substrato), altrimenti si trova nello stato 1.

1. Discutere sotto quali condizioni il funzionamento dell'enzima è modellabile mediante una catena di Markov omogenea a tempo continuo, e definire tale catena.

Esercizio 3

Il servizio al pubblico di un'amministrazione pubblica è costituito da due sportelli in parallelo identici e da uno spazio di attesa di capacità unitaria. Gli utenti si presentano come generati da un processo di Poisson con tasso 0.8 arrivi/min, mentre i tempi di servizio nei due sportelli seguono una distribuzione generica con valore atteso 1.5 min. Da misurazioni effettuate sul sistema risulta che, a regime, la frequenza effettiva di utenti in uscita dal servizio è 0.6 utenti/min, mentre la probabilità che entrambi gli sportelli siano occupati è 0.4.

1. Determinare il vettore delle probabilità stazionarie dello stato del sistema.