I Prova in Itinere di Sistemi ad Eventi Discreti - 15.12.2009

I turno

Esercizio 1

Una macchina logica riceve in ingresso una sequenza di bit 0 e 1, e restituisce l'OR degli ultimi due simboli osservati. All'accensione della macchina si suppone di aver osservato una sequenza di 0.

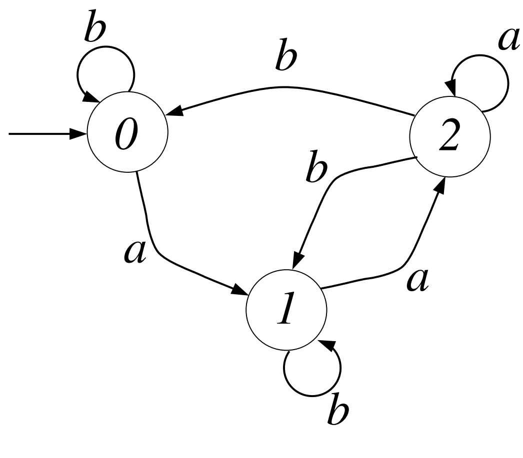
1. Costruire un automa a stati finiti $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, f, x_0, \mathcal{F})$ con numero minimo di stati che modelli il funzionamento della macchina logica.

2. Scrivere un'espressione regolare equivalente all'automa a stati finiti costruito al punto i).

Esercizio 2

Si consideri l'automa a stati stocastico $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, p, x_0, F)$ rappresentato in figura, con $\mathcal{E} = \{a, b\}$ e $p(0|2, b) = 1/4$. L'evento a è caratterizzato da durate di vita deterministiche $V_a = 1.2$, mentre

$$F_b(t) = P(V_b \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 1.0 \\ 8(t-1)^2 & \text{se } 1.0 \leq t < 1.25 \\ 1 - 2(2t-3)^2 & \text{se } 1.25 \leq t < 1.5 \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



1. Calcolare la probabilità $P(X_{k+2} = 1 \mid X_k = 2)$, dove k è il contatore del numero di eventi.

2. Calcolare, al variare di $t \geq 0$, la probabilità di visitare tutti gli stati nell'intervallo $[0, t]$ a partire dallo stato iniziale.

3. Calcolare la distribuzione di probabilità del tempo di attesa del primo evento, ossia la funzione $P(Y_0^* \leq t)$ per ogni $t \geq 0$.

Esercizio 3

In un impianto di produzione, un piccolo magazzino può ospitare fino a un massimo di tre pezzi semi-lavorati. I pezzi semi-lavorati possono essere di due tipi (tipo 1 e tipo 2), con i pezzi di tipo 2 che pesano il doppio rispetto a quelli di tipo 1. I pezzi arrivano al magazzino secondo processi di Poisson con tassi $\lambda_1 = 4$ arrivi/ora e $\lambda_2 = 3$ arrivi/ora, rispettivamente. Se non c'è posto nel magazzino, i pezzi vengono respinti.

Un carrello elevatore preleva i pezzi dal magazzino per trasportarli alla stazione di assemblaggio. Il peso massimo che il carrello può trasportare è equivalente a tre pezzi di tipo 1. Quando il carrello arriva al magazzino, carica i pezzi disponibili in modo da massimizzare il peso trasportato, compatibilmente con il peso massimo trasportabile. Se il magazzino è vuoto, il carrello non attende l'arrivo del prossimo pezzo. Il carrello ritorna al magazzino dopo tempi aleatori che seguono una distribuzione esponenziale con valore atteso 0.5 ore.

1. Modellare il sistema descritto mediante un automa a stati stocastico $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, f, x_0, F)$.

2. Calcolare la probabilità che si verifichino almeno tre arrivi di pezzi al magazzino prima dell'arrivo del carrello.

3. Noto che nel magazzino è presente solo un pezzo di tipo 2, e nessuno di tipo 1, calcolare la probabilità che, al prossimo arrivo del carrello, questo riparta a pieno carico.

4. Calcolare la probabilità che il magazzino rimanga vuoto per almeno un'ora, e nel frattempo il carrello ritorni al magazzino esattamente due volte.

II turno

Esercizio 1

Una macchina logica riceve in ingresso una sequenza di bit 0 e 1, e restituisce l'AND degli ultimi due simboli osservati. All'accensione della macchina si suppone di aver osservato una sequenza di 0.

1. Costruire un automa a stati finiti $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, f, x_0, \mathcal{F})$ con numero minimo di stati che modelli il funzionamento della macchina logica.

2. Scrivere un'espressione regolare equivalente all'automa a stati finiti costruito al punto i).

Esercizio 2

In un impianto di produzione, un piccolo magazzino può ospitare fino a un massimo di tre pezzi semi-lavorati. I pezzi semi-lavorati possono essere di due tipi (tipo 1 e tipo 2), con i pezzi di tipo 1 che pesano il doppio rispetto a quelli di tipo 2. I pezzi arrivano al magazzino secondo processi di Poisson con tassi $\lambda_1 = 4$ arrivi/ora e $\lambda_2 = 3$ arrivi/ora, rispettivamente. Se non c'è posto nel magazzino, i pezzi vengono respinti.

Un carrello elevatore preleva i pezzi dal magazzino per trasportarli alla stazione di assemblaggio. Il peso massimo che il carrello può trasportare è equivalente a tre pezzi di tipo 2. Quando il carrello arriva al magazzino, carica i pezzi disponibili in modo da massimizzare il peso trasportato, compatibilmente con il peso massimo trasportabile. Se il magazzino è vuoto, il carrello non attende l'arrivo del prossimo pezzo. Il carrello ritorna al magazzino dopo tempi aleatori che seguono una distribuzione esponenziale con valore atteso 0.5 ore.

1. Modellare il sistema descritto mediante un automa a stati stocastico $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, f, x_0, F)$.

2. Calcolare la probabilità che si verifichino esattamente quattro arrivi di pezzi al magazzino prima dell'arrivo del carrello.

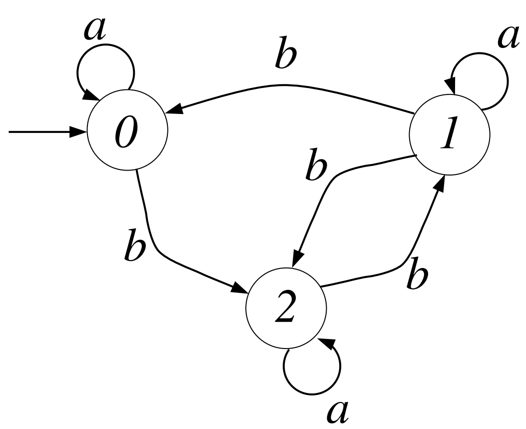
3. Noto che nel magazzino è presente solo un pezzo di tipo 1, e nessuno di tipo 2, calcolare la probabilità che, al prossimo arrivo del carrello, questo riparta a pieno carico.

4. Calcolare la probabilità che il magazzino rimanga vuoto per almeno un'ora, e nel frattempo il carrello ritorni al magazzino almeno due volte.

Esercizio 3

Si consideri l'automa a stati stocastico $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, p, x_0, F)$ rappresentato in figura, con $\mathcal{E} = \{a, b\}$ e $p(0|2, b) = 3/4$. L'evento b è caratterizzato da durate di vita deterministiche $V_b = 1.1$, mentre

$$F_a(t) = P(V_a \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 1.0 \\ 8(t-1)^2 & \text{se } 1.0 \leq t < 1.25 \\ 1 - 2(2t-3)^2 & \text{se } 1.25 \leq t < 1.5 \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



1. Calcolare la probabilità $P(X_{k+2} = 2 \mid X_k = 1)$, dove k è il contatore del numero di eventi.

2. Calcolare, al variare di $t \geq 0$, la probabilità di visitare tutti gli stati nell'intervallo $[0, t]$ a partire dallo stato iniziale.

3. Calcolare la distribuzione di probabilità del tempo di attesa del primo evento, ossia la funzione $P(Y_0^* \leq t)$ per ogni $t \geq 0$.