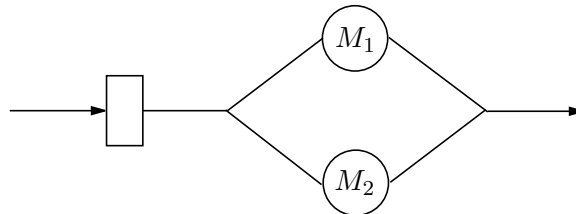


Esame di Sistemi ad Eventi Discreti - 17.04.2009

Esercizio 1

Una stazione di lavorazione di pezzi meccanici è costituita da un macchinario M_1 e da un buffer di capacità unitaria. L'azienda decide di acquistare un macchinario M_2 più veloce che esegue la stessa funzione di M_1 . Il nuovo macchinario viene utilizzato in parallelo al vecchio come illustrato in figura:

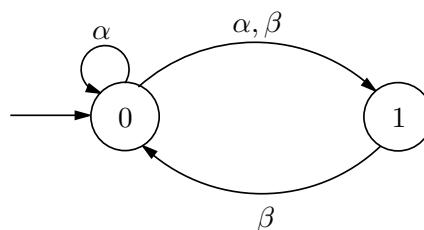


Quando entrambi i macchinari sono inattivi, un pezzo in arrivo per la lavorazione viene instradato verso M_2 . I tempi di lavorazione nei macchinari M_1 e M_2 seguono distribuzioni esponenziali con valori attesi 1 min/pezzo e 0.5 min/pezzo, rispettivamente. I pezzi arrivano secondo un processo di Poisson con tasso λ pezzi/min, e vengono rifiutati se la stazione di lavorazione è piena.

- i) Modellare il sistema come una catena di Markov a tempo continuo.
- ii) Determinare il minimo tasso λ che permette di garantire un'utilizzazione a regime di almeno il 75% per M_1 e di almeno il 90% per M_2 .

Esercizio 2

Un sistema ad eventi discreti è modellato da un automa a stati temporizzato stocastico $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, p, x_0, F)$, con $\mathcal{E} = \{\alpha, \beta\}$, $\mathcal{X} = \{0, 1\}$, $p(1|0, \alpha) = 0.8$, $F_\alpha(t)$ distribuzione esponenziale con parametro $\lambda = 1$, $F_\beta(t)$ distribuzione uniforme nell'intervallo $[0, 1]$, e diagramma di transizione



- i) Indicando con X_0 il valore dello stato all'istante iniziale e con X_1 il valore dello stato dopo il primo evento, calcolare la probabilità di transizione dello stato $P(X_1 = 1|X_0 = 0)$.
- ii) Fornire, giustificando la risposta, un limite superiore alla durata media di un ciclo tra i due stati.

Esercizio 3

Il gioco della roulette consiste in un disco suddiviso in 37 settori numerati da 0 a 36. Lo 0 non è considerato né pari né dispari. Un accanito giocatore dispone di un capitale iniziale pari a Q . Egli punta ripetutamente sul pari secondo la seguente strategia di gioco:

- All'inizio del gioco e dopo ogni vincita il giocatore punta una somma pari a Q .

- Dopo ogni perdita la somma puntata viene raddoppiata.

La strategia di gioco è pensata in maniera tale da garantire l'incremento del capitale iniziale di una somma pari a Q ogni qual volta si verifica una vincita. Il gioco termina nel caso in cui il capitale rimanente è esaurito o non è sufficiente a proseguire con la strategia prefissata.

i) Determinare, giustificando la risposta, quale delle seguenti definizioni di stato permette di modellare il gioco come una catena di Markov a tempo discreto:

a) $X(n)$ = numero di quote Q rimanenti dopo la n -esima giocata.

b) $X(n)$ = numero di quote Q rimanenti dopo l' n -esimo ciclo di giocate, intendendo un ciclo come una serie di giocate conclusa da una vincita o dalla terminazione del gioco. Esempio:

$$\underbrace{v}_{ciclo} \underbrace{v}_{ciclo} \underbrace{v}_{ciclo} \underbrace{v}_{ciclo} \underbrace{pv}_{ciclo} \underbrace{ppt}_{ciclo}$$

ii) In base alla risposta al punto *i)*, determinare la catena di Markov che modella il gioco.

iii) Classificare gli stati della catena.

iv) Calcolare la probabilità che il giocatore arrivi a sestuplicare il capitale e poi termini il gioco. Il giocatore perde, mantiene o incrementa il capitale iniziale?