Esame di Sistemi ad Eventi Discreti - 16.12.2008

Esercizio 1 (esame completo/recupero prima parte)

Un macchinario è programmato per *task*. Ciascun task è composto da *subtask*, che possono essere di tipo α, β, γ e δ. I subtask operativi sono di tipo β e γ. I subtask di tipo α e δ sono subtask speciali che aprono e chiudono ciascun task, rispettivamente. Inoltre, affinché un task sia ammissibile dal punto di vista produttivo:

- un subtask di tipo γ non può essere svolto se precedentemente nel task non è stato svolto almeno un subtask di tipo β;
- il task non può essere chiuso se precedentemente nel task non sono stati svolti almeno due subtask di tipo β e un subtask di tipo γ.

Descrivere mediante un automa a stati finiti il funzionamento logico di un sistema per il riconoscimento di sequenze di task ammissibili. Per semplificare il disegno dell'automa si possono omettere le transizioni verso lo stato assorbente che colleziona le sequenze scartate.

Esercizio 2 (solo recupero prima parte)

Un piccolo supermercato dispone di due casse, ciascuna con una propria coda. I clienti in arrivo alle casse scelgono la coda più corta e, a parità di lunghezza, scelgono a caso una delle due code con uguale probabilità. Secondo l'esperienza comune, alla partenza di un cliente da una cassa, l'ultimo cliente dell'altra coda cambia coda se così facendo riesce a migliorare la sua posizione. Lo spostamento si suppone istantaneo e simultaneo alla partenza. Il cliente che cambia coda va ovviamente a mettersi in fondo alla coda di arrivo.

i) Modellare il sistema come un automa a stati, definendo lo stato in modo da tener conto distintamente della situazione di entrambe le code. Si consiglia di disegnare una certa porzione del grafo delle transizioni per accorgersi della regolarità della struttura.

ii) Il responsabile del supermercato tiene sotto osservazione le due casse per 10 minuti al fine di valutare l'opportunità di aprire una nuova cassa. Nel periodo considerato, vengono rilevati arrivi di clienti ai minuti 1.0, 2.5, 4.0, 4.5, 6.5 e 7.5, e si osserva che, nei casi di uguale lunghezza delle due code, la preferenza dei clienti va sempre alla prima cassa. Inoltre, si hanno partenze dalla prima cassa ai minuti 3.0, 6.0 e 9.5, e dalla seconda ai minuti 5.0, 8.0 e 10.0. Calcolare una stima del numero totale medio di clienti alle casse. Risulta opportuno aprire una terza cassa?

Si assumano gli arrivi di clienti alle casse come generati da un processo di Poisson con tasso $\lambda = 0.75$ arrivi/minuto, e durate dei servizi alle casse che seguono distribuzioni esponenziali con valori medi pari a quelli ricostruibili dalla dinamica di temporizzazione al punto *ii*).

iii) Noto che ci sono due clienti in coda alla prima cassa, e uno alla seconda cassa, calcolare la probabilità che il cliente in attesa di servizio esca dal sistema prima del cliente che attualmente lo precede e prima che avvenga un nuovo arrivo.

Esercizio 3 (esame completo/recupero seconda parte)

Considerare il medesimo sistema descritto nell'Esercizio 2. Gli arrivi di clienti alle casse sono generati secondo un processo di Poisson con tasso $\lambda = 0.8$ arrivi/minuto, e le durate di servizio alle casse seguono distribuzioni esponenziali con valore atteso $\frac{1}{\mu} = 2.5$ minuti.

i) Modellare il sistema come una catena di Markov a tempo continuo, facendo l'ipotesi semplificativa che le code alle due casse abbiano capacità $K = 2$ (incluso, come al solito, il cliente in servizio).

ii) Calcolare il numero medio a regime di clienti nel sistema.

iii) Calcolare il tasso effettivo a regime dei clienti ammessi nel sistema.

iv) Determinare il tempo medio che, a regime, un cliente spende in attesa del servizio alla cassa una volta entrato in coda.

(solo esame completo)

v) Rispondere alla stessa domanda del punto *iii*) dell'Esercizio 2.

Esercizio 4 (esame completo/recupero seconda parte)

Gli individui maschi di una specie animale sono classificati in base a una coppia di geni, ciascuno dei quali può essere solo di tipo G o g. Tale coppia di geni sembra infatti essere responsabile dell'attitudine dell'individuo nella vita sociale del branco. Una coppia GG (entrambi i geni di tipo G) indica un carattere *dominante*, una coppia gg (entrambi i geni di tipo g) indica un carattere *soccombente*, mentre una coppia Gg (un gene di tipo G e l'altro di tipo g) indica un carattere *neutro*. Gli individui femmine della specie hanno sempre una coppia di geni Gg. In caso di riproduzione, il discendente eredita un gene dalla coppia di ciascun genitore, e l'assunzione base della genetica è che questi geni sono scelti a caso, e indipendentemente gli uni dagli altri. Visto l'elevato livello riproduttivo della specie, ciascun individuo maschio ha tipicamente almeno un discendente maschio.

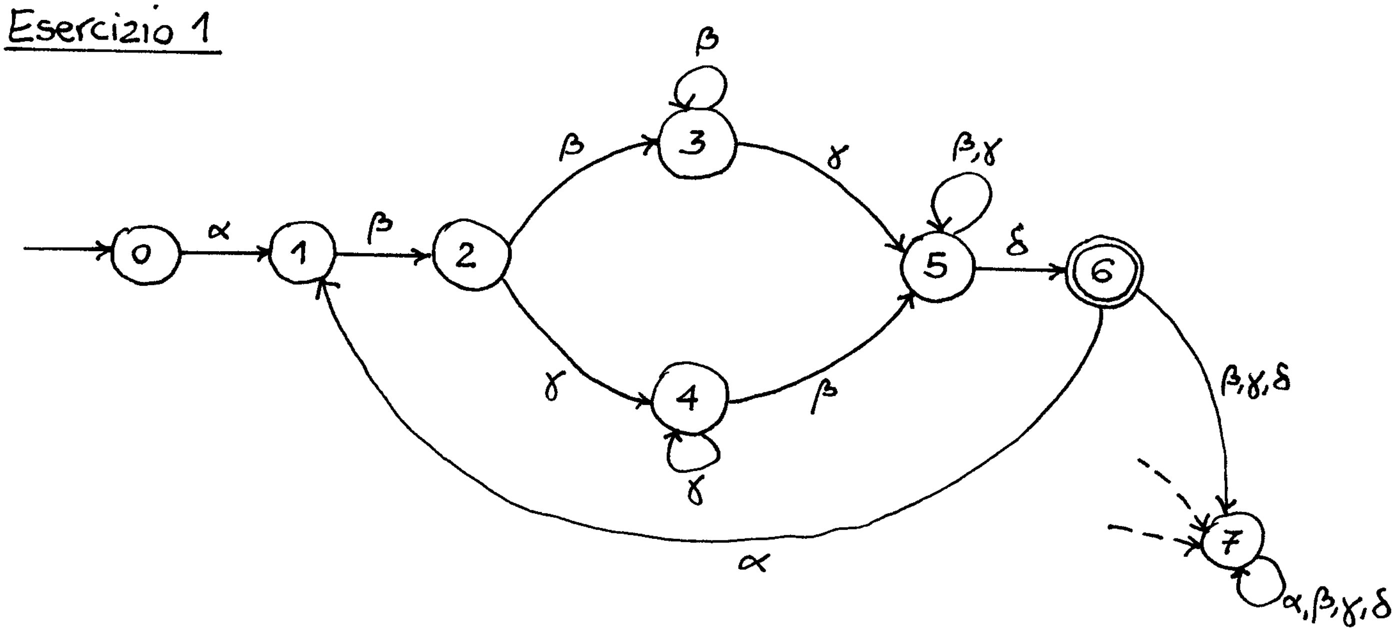
i) Costruire una catena di Markov a tempo discreto che, dato un capostipite, modelli la dinamica dei caratteri con le generazioni, considerando a ogni generazione il generico discendente maschio.

ii) Verificare che, a partire dalla prima generazione di discendenza, la probabilità che il carattere sia neutro è sempre $\frac{1}{2}$, indipendentemente dal carattere del capostipite.

iii) Se possibile, utilizzare il modello costruito per determinare la distribuzione a regime dei caratteri nella specie animale considerata.

SOLUZIONI

Esercizio 1



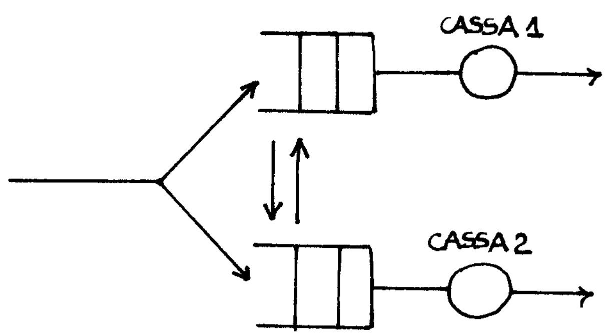
Si osservi che:

- nello stato 2 è stato eseguito <u>un</u> subtask β e <u>nessun</u> subtask γ
- nello stato 3 sono stati eseguiti <u>due o più</u> subtask β e <u>nessun</u> subtask γ
- nello stato 4 sono stati eseguiti <u>un</u> subtask β e <u>uno o più</u> subtask γ
- nello stato 5 sono stati eseguiti <u>due o più</u> subtask β e <u>uno o più</u> subtask γ

Non sono state rappresentate tutte le transizioni verso lo stato assorbente 7.

Esercizio 2

i) Dal punto di vista grafico, il sistema considerato può essere rappresentato come segue:



Gli eventi del sistema sono:

a : arrivo di un cliente

d_1 : terminazione di un servizio alla cassa 1 $\Rightarrow \mathcal{E} = \{a, d_1, d_2\}$

d_2 : " " " " " " 2

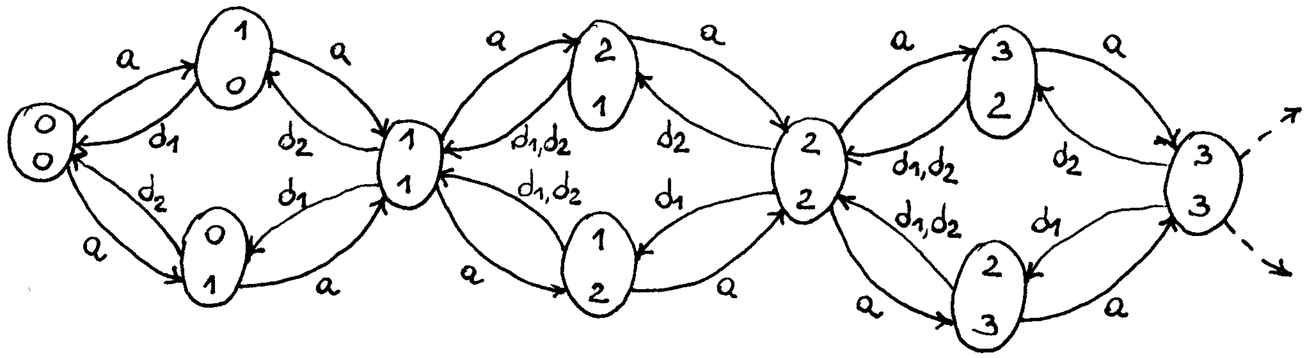
Lo stato del sistema può essere definito come:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad x_i = \text{lunghezza della coda } i, \ i = 1,2$$

L'insieme degli stati del sistema è dunque:

$$\mathcal{X} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \dots \right\}$$

Disegnamo una porzione del grafo delle transizioni:



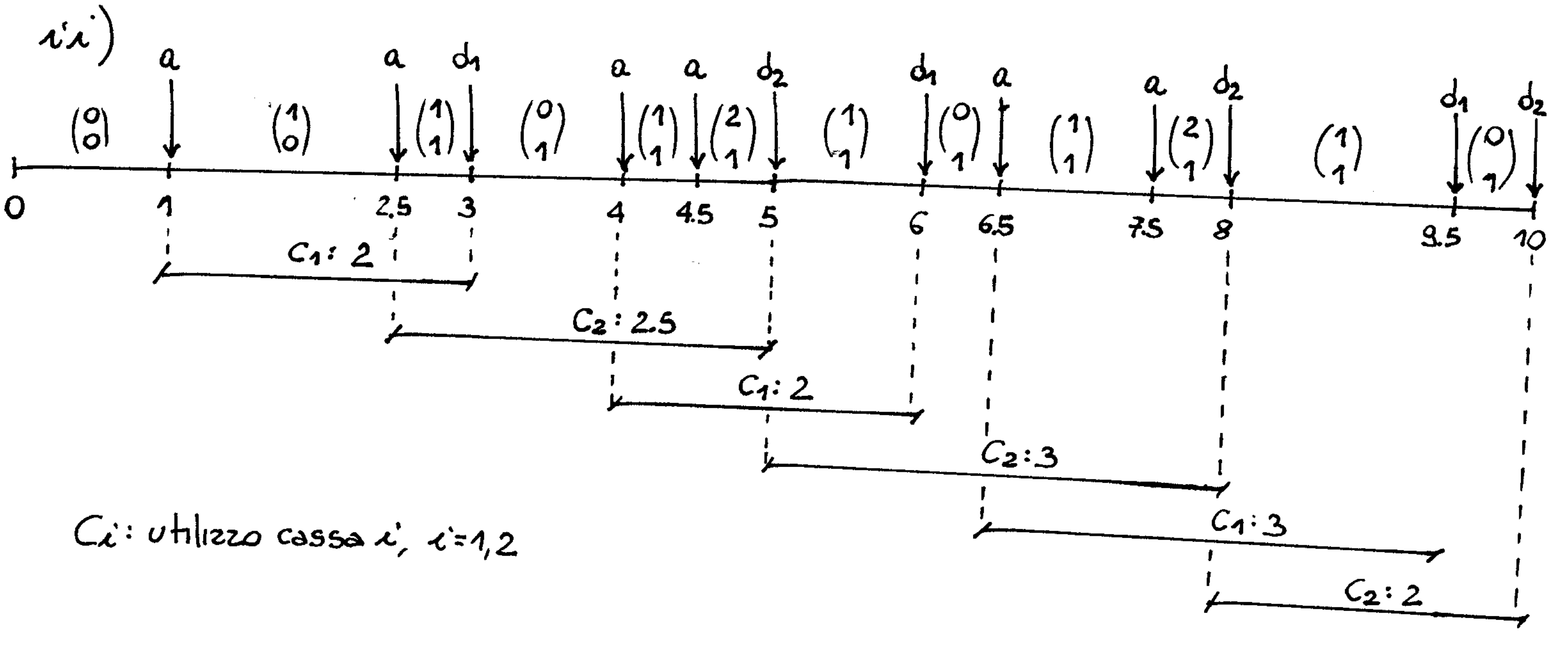
Le transizioni dagli stati $x = \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix}$, $i = 0,1,2,\dots$, con l'evento a non sono deterministiche. Si ha:

$$p\left(\begin{bmatrix} i+1 \\ i \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix}, a \right) = \frac{1}{2}$$

$$i = 0,1,2,\dots$$

$$p\left(\begin{bmatrix} i \\ i+1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix}, a \right) = \frac{1}{2}$$

ii)



C_i: utilizzo cassa i, $i = 1,2$

# clienti	tempo	prob. stimate
0	1	$\hat{\pi}_0 = 1/10$
1	$1.5+1+0.5+0.5 = 3.5$	$\hat{\pi}_1 = 3.5/10 = 7/20$
2	$0.5+0.5+1+1+1.5 = 4.5$	$\hat{\pi}_2 = 4.5/10 = 9/20$
3	$0.5+0.5 = 1$	$\hat{\pi}_3 = 1/10$

=> stima del numero totale medio di clienti $= 0\cdot\frac{1}{10}+1\cdot\frac{7}{20}+2\cdot\frac{9}{20}+3\cdot\frac{1}{10} = \frac{31}{20} \simeq 1.55$

non è necessario aprire una terza cassa

durata media dei servizi alla cassa 1: $\frac{2+2+3}{3} = \frac{7}{3} \Rightarrow \mu_1 = \frac{3}{7}$

durata media dei servizi alla cassa 2: $\frac{2.5+3+2}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow \mu_2 = \frac{2}{5}$

iii) Lo stato corrente è $X_k = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. L'evento di cui si deve calcolare la probabilità può essere scomposto nel susseguirsi di due eventi indipendenti:

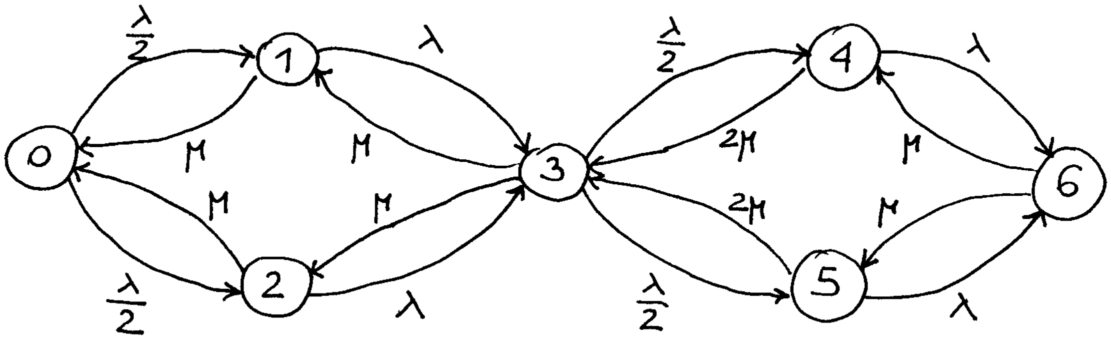
- il cliente servito alla cassa 2 deve terminare il proprio servizio prima che ci sia un nuovo arrivo e il cliente servito alla cassa 1 termini il proprio servizio.
  ↳ questo permette al cliente in attesa in coda alla cassa 1 di andare in servizio alla cassa 2.
- il nuovo cliente servito alla cassa 2 deve terminare il proprio servizio prima che il cliente servito alla cassa 1 termini il proprio servizio.

La probabilità cercata è dunque:

$$\frac{\mu_2}{\lambda+\mu_1+\mu_2}\,\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} = \frac{784}{6409} \simeq 0.1223$$

Esercizio 3

i) Dalla soluzione del punto i) dell'Esercizio 2, otteniamo immediatamente:



↳ catena di Markov con 7 stati e matrice dei tassi di transizione:

$$
Q = \begin{bmatrix}
-\lambda & \frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mu & -(\lambda+\mu) & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
\mu & 0 & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mu & \mu & -(\lambda+2\mu) & \frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & 0 & \lambda \\
0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & -(\lambda+2\mu) & \lambda \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mu & \mu & -2\mu
\end{bmatrix}
$$

ii) La catena è irriducibile e finita, quindi ammette distribuzione di probabilità degli stati a regime, che si ottiene risolvendo il sistema:

$$
\begin{cases} \pi Q = 0 \\ \sum \pi_i = 1 \end{cases} \Rightarrow
$$

(1) $-\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 + \mu\pi_2 = 0$

(2) $\frac{\lambda}{2}\pi_0 - (\lambda+\mu)\pi_1 + \mu\pi_3 = 0$

(3) $\frac{\lambda}{2}\pi_0 - (\lambda+\mu)\pi_2 + \mu\pi_3 = 0$

(5) $\frac{\lambda}{2}\pi_3 - (\lambda+2\mu)\pi_4 + \mu\pi_6 = 0$

(6) $\frac{\lambda}{2}\pi_3 - (\lambda+2\mu)\pi_5 + \mu\pi_6 = 0$

(7) $\lambda\pi_4 + \lambda\pi_5 - 2\mu\pi_6 = 0$

(8) $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 = 1$

Da 2 e 3:

$\Pi_1 = \Pi_2$

Sostituendo in 1:

$-\lambda \Pi_0 + 2\mu \Pi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Pi_1 = \frac{\lambda}{2\mu}\Pi_0, \quad \Pi_2 = \frac{\lambda}{2\mu}\Pi_0$

Sostituendo in 3:

$$\Pi_3 = \frac{1}{\mu}\left((\lambda+\mu)\Pi_2 - \frac{\lambda}{2}\Pi_0\right) = \frac{\lambda}{2\mu}\left(\frac{\lambda+\mu}{\mu} - 1\right)\Pi_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\Pi_0$$

Da 5 e 6:

$\Pi_4 = \Pi_5$

Sostituendo in 7:

$2\lambda \Pi_4 - 2\mu \Pi_6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Pi_6 = \frac{\lambda}{\mu}\Pi_4$

Sostituendo in 5:

$$\frac{\lambda}{2}\Pi_3 - (\lambda+2\mu)\Pi_4 + \mu\cdot\frac{\lambda}{\mu}\Pi_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{2}\Pi_3 - 2\mu\Pi_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Pi_4 = \frac{1}{4}\frac{\lambda}{\mu}\Pi_3 = \frac{1}{8}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\Pi_0$$

$\Pi_5 = \frac{1}{8}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\Pi_0$

$\Pi_6 = \frac{1}{8}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4\Pi_0$

Ponendo $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ e sostituendo in 8:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}\rho^2 + \frac{1}{8}\rho^3 + \frac{1}{8}\rho^3 + \frac{1}{8}\rho^4\right)\Pi_0 = 1$$

$$\Rightarrow \Pi_0 = \frac{1}{1+\rho+\frac{1}{2}\rho^2+\frac{1}{4}\rho^3+\frac{1}{8}\rho^4} = \frac{1}{1+2+2+2+2} = \frac{1}{9}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.8}{0.4} = 2$$

$\Pi_1 = \Pi_2 = \frac{1}{2}\rho\Pi_0 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{9}$; $\Pi_3 = \frac{1}{2}\rho^2\Pi_0 = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{1}{9} = \frac{2}{9}$

$\Pi_4 = \Pi_5 = \frac{1}{8}\rho^3\Pi_0 = \frac{1}{8}\cdot 8\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{9}$; $\Pi_6 = \frac{1}{8}\rho^4\Pi_0 = \frac{1}{8}\cdot 16\cdot\frac{1}{9} = \frac{2}{9}$

$$\Rightarrow \quad \Pi = \Big[\underbrace{\tfrac{1}{9}}_{\text{0 clienti}}\ \underbrace{\tfrac{1}{9}\ \tfrac{1}{9}}_{\text{1 cliente}}\ \underbrace{\tfrac{2}{9}}_{\text{2 clienti}}\ \underbrace{\tfrac{1}{9}\ \tfrac{1}{9}}_{\text{3 clienti}}\ \underbrace{\tfrac{2}{9}}_{\text{4 clienti}}\Big]$$

$$E[X] = 0 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right) + 2 \cdot \frac{2}{9} + 3 \cdot \left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right) + 4 \cdot \frac{2}{9} = \frac{20}{9} \simeq 2.22$$

iii) $\lambda_{eff} = \lambda \cdot (1 - \pi_6) = 0.8 \cdot \frac{7}{9} \simeq 0.622$

iv) Applicando la legge di Little, possiamo ricavare il valore atteso a regime del tempo di soggiorno di un cliente nel sistema:

$$E[S] = \frac{E[X]}{\lambda_{eff}} = \frac{\frac{20}{9}}{\frac{28}{45}} = \frac{\cancel{20}^{5}}{\cancel{9}_{1}} \cdot \frac{\cancel{45}^{5}}{\cancel{28}_{7}} = \frac{25}{7} \simeq 3.571$$

Da cui:

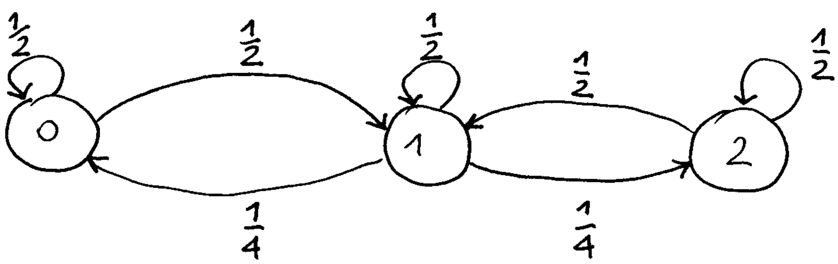
$$E[W] = E[S] - \frac{1}{\mu} = \frac{25}{7} - \frac{5}{2} = \frac{50-35}{14} = \frac{15}{14} \simeq 1.071$$

v) Come nella soluzione del punto iii) dell'Esercizio 2:

$$\frac{\mu}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{\mu}{2\mu} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0.125$$

Esercizio 4

i) La catena di Markov richiesta è la seguente:



0: GG

1: Gg

2: gg

Con matrice delle probabilità di transizione a un passo:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

NOTA: per calcolare le probabilità di transizione a un passo:

esempio: $Gg \to Gg$ con G da maschio e g da femmina $\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

oppure $+$

g da maschio e G da femmina $\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$\|$

$\frac{1}{2}$

ii) Osserviamo che $P = \begin{bmatrix} * & \frac{1}{2} & * \\ * & \frac{1}{2} & * \\ * & \frac{1}{2} & * \end{bmatrix}$.

Assumiamo che $P^t = \begin{bmatrix} * & \frac{1}{2} & * \\ * & \frac{1}{2} & * \\ * & \frac{1}{2} & * \end{bmatrix}$.

Allora $P^{t+1} = P \cdot P^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & \frac{1}{2} & * \\ * & \frac{1}{2} & * \\ * & \frac{1}{2} & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & \frac{1}{2} & * \\ * & \frac{1}{2} & * \\ * & \frac{1}{2} & * \end{bmatrix}$.

Per induzione abbiamo mostrato che $P^t = \begin{bmatrix} * & \frac{1}{2} & * \\ * & \frac{1}{2} & * \\ * & \frac{1}{2} & * \end{bmatrix}$, $t = 1, 2, 3, \dots$

$$\pi(t) = [\pi_0(t) \ \ \pi_1(t) \ \ \pi_2(t)] = \pi(0) P^t = \Big[* \ \ \frac{1}{2} \underbrace{\left(\pi_0(0) + \pi_1(0) + \pi_2(0)\right)}_{= 1 \ \dots \text{ perché?}} \ \ * \Big]$$

$$= [* \ \ \tfrac{1}{2} \ \ *]$$

$$\Rightarrow \pi_1(t) = \frac{1}{2} \quad \forall t = 1, 2, 3, \dots$$

iii) La catena è irriducibile, aperiodica e finita. Quindi ammette distribuzione di probabilità stazionaria degli stati, <u>indipendente dalla condizione iniziale</u>

per questo può essere interpretata come distribuzione a regime dei caratteri nella specie animale considerata.

$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ \sum \pi_i = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_1 = \pi_0 & \Rightarrow \quad \pi_1 = 2\pi_0 \\ \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 = \pi_2 & \Rightarrow \quad \pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1 = \pi_0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 & \Rightarrow \quad (1+2+1)\pi_0 = 1 \Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\pi_1 = \frac{1}{2}, \quad \pi_2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$