II Prova in Itinere di Sistemi ad Eventi Discreti - 03.12.2008

Esercizio 1

Un sistema informatico è costituito da tre risorse identiche. In ciascun intervallo di clock arriva una richiesta di utilizzo di una risorsa, che viene accettata se c'è disponibilità. Nel corso di un intervallo di clock, ciascuna risorsa occupata si può liberare con probabilità $p = \frac{1}{2}$. Se tutte le risorse sono occupate, e almeno una risorsa si libera nell'intervallo di clock, la nuova richiesta viene accettata; altrimenti, viene respinta.

i) Modellare il sistema come una catena di Markov a tempo discreto, definendo il numero di risorse occupate come stato della catena.

ii) Calcolare la probabilità che tutte e tre le risorse siano contemporaneamente occupate per esattamente 5 intervalli di clock.

iii) Valutare, giustificando la risposta, l'occupazione a regime delle risorse.

iv) Determinare, se è finito, il valore atteso del tempo di ricorrenza dello stato con solo una risorsa occupata.

Esercizio 2

Un macchinario produce un prodotto finito alla volta. I prodotti finiti vengono stoccati in un magazzino di capacità $K = 3$. La durata della lavorazione di un prodotto è una variabile aleatoria esponenziale con valore atteso $\frac{1}{\lambda} = 0.5$ giorni. Quando il magazzino è pieno, la produzione di nuovi prodotti viene sospesa. Gli ordini di prodotti arrivano al magazzino secondo un processo di Poisson con tasso $\mu = 1$ ordine/giorno. Se l'ordine arriva e nel magazzino ci sono i prodotti, con probabilità $\frac{2j}{i(i+1)}$ l'ordine richiede j prodotti, $j = 1, \ldots, i$.

i) Calcolare il valore atteso del numero di prodotti nel magazzino a regime, definendo a tal fine un opportuno modello del sistema.

Esercizio 3

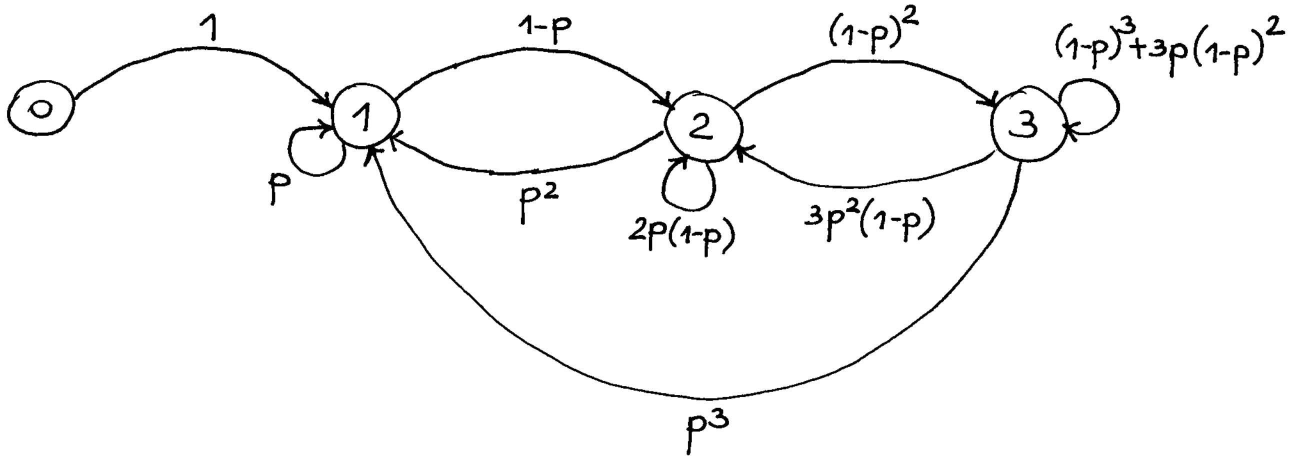
Una ditta utilizza un sistema produttivo in cui un pezzo grezzo viene lavorato sequenzialmente da una macchina M_1 e da una macchina M_2. Entrambe le macchine sono prive di spazio di accodamento. Se M_1 termina la sua lavorazione e M_2 è occupata, M_1 trattiene il pezzo (e quindi non si rende disponibile per una nuova lavorazione) fino a quando M_2 si libera. I pezzi grezzi che arrivano quando M_1 è occupata, vengono respinti. Alla ditta viene proposto di sostituire le due macchine con una singola macchina M_3 che adotta una nuova tecnologia di lavorazione, ed è dotata di spazio di accodamento pari a una unità. I pezzi grezzi che arrivano quando lo spazio di accodamento è occupato, vengono respinti.

i) Supposto che i pezzi grezzi arrivino come generati da un processo di Poisson con tasso $\lambda = 0.25$ arrivi/ora, che le durate delle lavorazioni nelle tre macchine seguano distribuzioni esponenziali con tassi $\mu_1 = \mu_3 = 0.5$ e $\mu_2 = 0.75$ lavorazioni/ora, rispettivamente, e che la ditta è interessata a ridurre la probabilità a regime che un pezzo grezzo in arrivo venga respinto, valutare se la nuova opzione è accettabile per la ditta.

Soluzioni

Esercizio 1

i) La catena di Markov richiesta è la seguente:



con matrice delle probabilità di transizione a un passo:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & p & 1-p & 0 \\ 0 & p^2 & 2p(1-p) & (1-p)^2 \\ 0 & p^3 & 3p^2(1-p) & (1-p)^3+3p(1-p)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ii) $P\left(V(3)=5\right) = p_{3,3}^4 \cdot (1-p_{3,3}) = \frac{1}{32} \simeq 0.031$

iii) La catena non è irriducibile. Tuttavia si può osservare che, se la catena si trova inizialmente nello stato 0, dopo un passo entra nell'insieme chiuso e irriducibile $\{1,2,3\}$. Quindi a regime si avrà $\pi_0 = 0$, mentre π_1, π_2 e π_3 si ottengono risolvendo:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{3}{8}\pi_3 = \pi_2 \\ \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi_2 = 2\pi_3$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2}\pi_1 - \frac{1}{2}\cdot 2\pi_3 + \frac{3}{8}\pi_3 = 0 \Rightarrow \pi_1 = \frac{5}{4}\pi_3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5}{4}+2+1\right)\pi_3 = 1$$

$\Rightarrow \pi_3 = \frac{4}{17}, \quad \pi_2 = \frac{8}{17}, \quad \pi_1 = \frac{5}{17}$

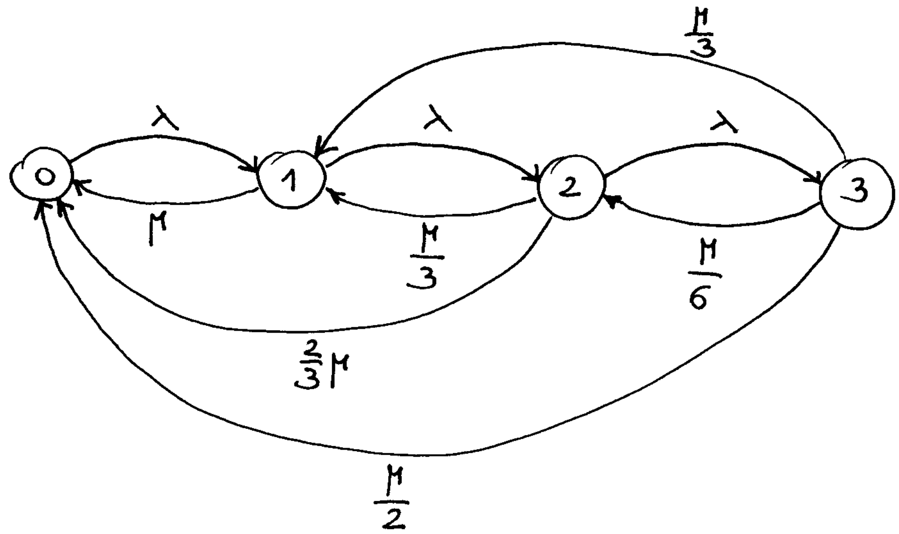
$\Rightarrow \pi = \left[0 \;\; \frac{5}{17} \;\; \frac{8}{17} \;\; \frac{4}{17} \right]$

iv) Dai risultati noti sulle distribuzioni di probabilità stazionarie:

$$M_1 = \frac{1}{\pi_1} = \frac{17}{5} = 3.4$$

Esercizio 2

i) Il sistema può essere modellato dalla seguente catena di Markov:



dove lo stato rappresenta il numero di pezzi nel magazzino, e la matrice dei tassi di transizione è:

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ \frac{2}{3}\mu & \frac{\mu}{3} & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ \frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{3} & \frac{\mu}{6} & -\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -3 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -1 \end{bmatrix}$$

La catena è irriducibile e finita. La distribuzione di probabilità stazionaria degli stati esiste, e si può ottenere risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2\pi_0 - 3\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 = 0 \\ 2\pi_1 - 3\pi_2 + \frac{1}{6}\pi_3 = 0 \\ 2\pi_2 - \pi_3 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi_3 = 2\pi_2$$

$$\Rightarrow 2\pi_1 - 3\pi_2 + \frac{1}{6} \cdot 2\pi_2 = 0 \Rightarrow \pi_1 = \frac{4}{3}\pi_2$$

$$\Rightarrow -2\pi_0 + 3 \cdot \frac{4}{3}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{3} \cdot 2\pi_2 = 0 \Rightarrow \pi_0 = \frac{3}{2}\pi_2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + 1 + 2\right)\pi_2 = 1 \Rightarrow \pi_2 = \frac{6}{35}$$

$$\Rightarrow \pi_0 = \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{6}^{3}}{35} = \frac{9}{35} \; ; \quad \pi_1 = \frac{4}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{6}^{2}}{35} = \frac{8}{35} \; ; \quad \pi_3 = 2 \cdot \frac{6}{35} = \frac{12}{35}$$

$$\Rightarrow \pi_0 = \left[\frac{9}{35} \;\; \frac{8}{35} \;\; \frac{6}{35} \;\; \frac{12}{35} \right]$$

$$E[X] = 0 \cdot \frac{9}{35} + 1 \cdot \frac{8}{35} + 2 \cdot \frac{6}{35} + 3 \cdot \frac{12}{35} = \frac{8}{5} = 1.6$$

Esercizio 3

i) situazione attuale

La probabilità di blocco della serie delle macchine M_1 e M_2 è ovviamente **non inferiore** alla probabilità di blocco della sola macchina M_1. Quindi:

$$P_{B,attuale} \geq \underbrace{\rho_1 \frac{1-\rho_1}{1-\rho_1^2}}_{\text{prob. di blocco di una coda } M/M/1/1} = \frac{\rho_1}{1+\rho_1} \simeq 0.333 \qquad \text{dove } \rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} = 0.5$$

situazione proposta

$$P_{B,proposta} = \rho_3^2 \frac{1-\rho_3}{1-\rho_3^3} \simeq 0.143 \qquad \text{dove } \rho_3 = \frac{\lambda}{\mu_3} = 0.5$$

Dato che $P_{B,attuale} > P_{B,proposta}$, la nuova soluzione è accettabile.