Esame di Sistemi ad Eventi Discreti - 17.04.2008

Esercizio 1

Si consideri l'alfabeto $\mathcal{E} = \{a, b\}$.

i) Dato il linguaggio $\mathcal{L}_1$ sull'alfabeto $\mathcal{E}$ definito dall'espressione regolare $(a + bb^*aa)(b + a(b + ab)aa)^*$, si determini se le seguenti parole appartengono al linguaggio $\mathcal{L}_1$, giustificando le risposte:

$$(a)\ \ w_1 = babba; \ \ (b)\ \ w_2 = abbaabaa; \ \ (c)\ \ w_3 = abaabb; \ \ (d)\ \ w_4 = aabaab$$

ii) Si determini un automa a stati finiti che riconosca il linguaggio $\mathcal{L}_2$ costituito dalle parole che contengono un numero dispari di a e un numero pari di b.

Esercizio 2

Una stazione di servizio priva di spazio di accodamento è composta da due serventi S_1 e S_2 in parallelo. Quando un cliente arriva ed entrambi i serventi sono liberi, decide con probabilità $p = \frac{1}{3}$ di servirsi presso S_1. Se un cliente arriva ed entrambi i serventi sono occupati, non viene ammesso al servizio. Il tempo medio tra due arrivi è di 2 minuti, mentre la durata media di un servizio è di 2.5 minuti per S_1 e di 2.2 minuti per S_2. Si assumano tempi di interarrivo e tempi di servizio con distribuzione esponenziale.

i) Si modellizzi il sistema mediante un automa a stati temporizzato stocastico $\{\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, p, x_0, F\}$, assumendo i serventi inattivi all'istante iniziale.

ii) Supposto che inizialmente la stazione di servizio sia vuota, si calcoli la probabilità che il secondo cliente in arrivo cominci a essere servito prima che il primo termini il suo servizio.

iii) Supposto che inizialmente la stazione di servizio sia vuota, si calcoli la probabilità che il secondo cliente possa essere servito nel servente più veloce.

iv) Si modellizzi il sistema mediante una catena di Markov a tempo continuo, stabilendo corrispondenze e differenze rispetto al modello fornito al punto *i*).

Esercizio 3

Una sorgente genera pacchetti di informazione per una rete di telecomunicazioni che trasmette a intervalli di tempo di lunghezza fissa, detti *slot*. Ogni pacchetto viene generato e trasmesso nella durata di uno slot. La sorgente alterna periodi in cui è nello stato *off* (cioè non genera pacchetti) a periodi in cui genera pacchetti (stato *on*). In questo secondo caso viene generato un pacchetto in ogni slot. Si suppone che le durate (espresse in numero di slot) degli intervalli di permanenza nei due stati *on* e *off* possano essere descritte come variabili aleatorie con distribuzione geometrica.

i) Si costruisca una catena di Markov a tempo discreto che modellizzi il comportamento della sorgente, noto che a regime la sorgente è *on* per $\frac{1}{4}$ del tempo, mentre gli intervalli di permanenza nello stato *on* hanno mediamente durata 10 slot.

Suggerimento. Se la variabile aleatoria X segue la distribuzione geometrica $P(X = n) = p\,(1 - p)^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, il valore atteso di X è $\mathrm{E}[X] = \frac{1}{p}$.