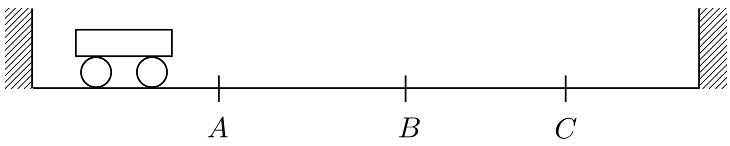
## Esame di Sistemi ad Eventi Discreti - 17.01.2008

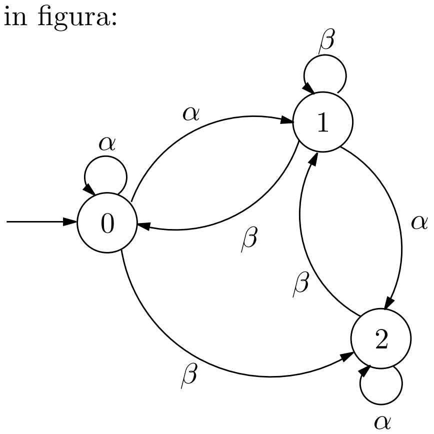
**Esercizio 1 (prima parte)**

Un carrello si muove lungo un binario sul quale sono disposti tre sensori (indicati con $A$, $B$ e $C$ in figura) che segnalano il passaggio del carrello da quel punto in entrambi le direzioni. Costruire un automa a stati finiti per la localizzazione del carrello sul binario e la rilevazione di guasti a uno o più sensori. Per localizzazione del carrello si intende conoscere in quale tratto del binario esso si trova. Si suppone che il carrello parta dal punto estremo a sinistra del binario.




**Esercizio 2 (prima parte)**

Si consideri l'automa a stati in figura:




Ogni qual volta, in corrispondenza del medesimo evento, è possibile sia mantenere che lasciare lo stato corrente, il prossimo stato è determinato generando un numero con distribuzione uniforme tra 0 e 1: se il numero generato è superiore a 0.4, lo stato corrente viene abbandonato. Siano $F_\alpha$ e $F_\beta$ le distribuzioni di probabilità esponenziali delle durate di vita degli eventi $\alpha$ e $\beta$, aventi parametri $\lambda = 2$ e $\mu = 1.5$, rispettivamente.

*i*) Modellizzare il funzionamento dell'automa come un automa a stati temporizzato stocastico di cui si richiede la sestupla $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, p, x_0, F)$.

*ii*) Calcolare la densità di probabilità dello stato dopo il primo evento.

*iii*) Calcolare il valore atteso della durata dell'intervallo tra due eventi consecutivi.

*iv*) Calcolare la probabilità di avere 4 eventi $\alpha$ e nessun evento $\beta$ in $t_1 = 0.5$ secondi.

*v*) Calcolare la probabilità di non restare nello stato $X = 2$ per più di $t_2 = 0.8$ secondi.

*vi*) Partendo dallo stato iniziale, calcolare la probabilità di visitare tutti gli altri stati nel minor numero di eventi.

**Esercizio 3 (seconda parte)**

Un magazzino ha capacità massima di tre prodotti finiti. La rete di vendita preleva i prodotti dal magazzino secondo ordini singoli e doppi. Gli ordini di prodotti singoli avvengono secondo un processo di Poisson con tasso giornaliero $\mu_1 = 2$, mentre gli ordini di coppie di prodotti arrivano secondo un processo di Poisson con tasso giornaliero $\mu_2 = 10$. Gli ordini che non possono essere soddisfatti immediatamente rimangono inevasi. La richiesta di approvvigionamento viene inoltrata alla linea di produzione quando nel magazzino ci sono meno di due prodotti, e viene evasa in un tempo che ha distribuzione esponenziale con valore atteso 0.025 giorni/richiesta. L'approvvigionamento porta sempre il magazzino alla sua capacità massima al momento dell'evasione della richiesta.

*i*) Mostrare che il sistema può essere modellizzato come una catena di Markov a tempo continuo, di cui si chiede di calcolare la matrice dei tassi di transizione.

*ii*) Calcolare il numero medio di prodotti in magazzino a regime.

*iii*) Calcolare la probabilità a regime che un ordine rimanga inevaso.

**Esercizio 4 (seconda parte)**

Il tempo in una città può essere caratterizzato come *soleggiato*, *nuvoloso* o *piovoso*. Se un giorno il tempo è soleggiato, il giorno dopo sole e nuvole sono ugualmente probabili. Se è nuvoloso, c'è una possibilità del 50% che il giorno successivo sia soleggiato, e del 25% che sia piovoso. Se piove, il giorno seguente non ci sarà il sole, mentre nuvole e persistenza della pioggia sono ugualmente probabili.

*i*) Mostrare che il sistema può essere modellizzato come una catena di Markov a tempo discreto, di cui si chiede di calcolare la matrice di transizione.

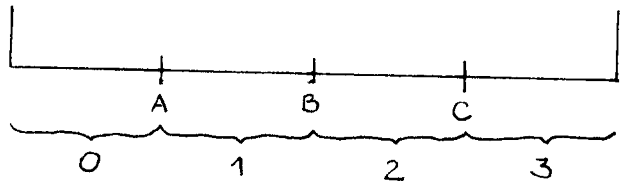
*ii*) Calcolare la probabilità a regime di tutti gli stati.

*iii*) Calcolare la probabilità che il tempo si mantenga soleggiato per esattamente tre giorni consecutivi.

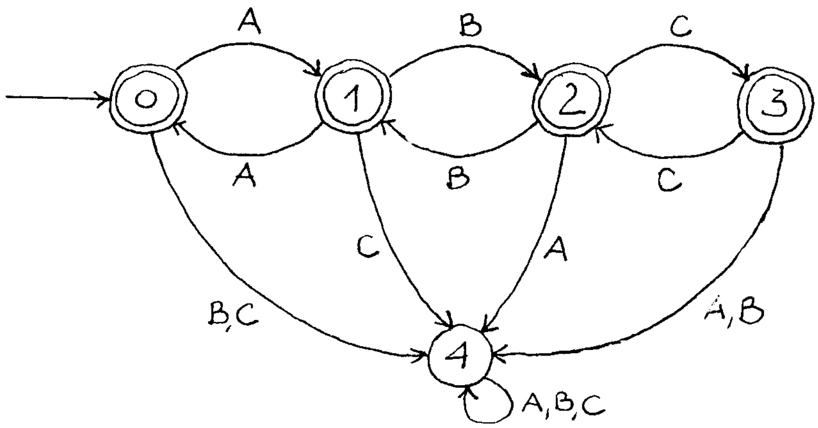
*iv*) Calcolare la probabilità che, fra tre giorni, il tempo sia nuvoloso, noto che oggi è soleggiato.

# Soluzioni

## Esercizio 1




Una soluzione è la seguente:




dove i numeri da 0 a 3 identificano il tratto del binario (vedi figura in alto), il numero 4 rappresenta lo stato di guasto, le lettere A, B e C rappresentano gli eventi di attraversamento dei sensori. Gli stati di corretto funzionamento vengono anche considerati come finali.

## Esercizio 2

i)
- $\mathcal{E} = \{\alpha, \beta\}$ insieme degli eventi
- $\mathcal{X} = \{0, 1, 2\}$ insieme degli stati
- $\Gamma(x) = \{\alpha, \beta\} \quad \forall x \in \mathcal{X}$ insiemi degli eventi possibili in ciascuno stato
- probabilità di transizione:

$p(0|0,\alpha) = 0.4$

$p(1|0,\alpha) = 0.6$ NOTA: $Y \sim U(0,1)$

$p(2|0,\alpha) = 0$ $p(1|0,\alpha) = P(Y > 0.4) = 0.6$

$p(0|0,\beta)=0$ $\quad p(0|1,\alpha)=0$ $\quad p(0|1,\beta)=0.6$

$p(1|0,\beta)=0$ $\quad p(1|1,\alpha)=0$ $\quad p(1|1,\beta)=0.4$

$p(2|0,\beta)=1$ $\quad p(2|1,\alpha)=1$ $\quad p(2|1,\beta)=0$

$p(0|2,\alpha)=0$ $\quad p(0|2,\beta)=0$

$p(1|2,\alpha)=0$ $\quad p(1|2,\beta)=1$

$p(2|2,\alpha)=1$ $\quad p(2|2,\beta)=0$

- $x_0=0$ stato iniziale
- $F=\{F_\alpha, F_\beta\}$ con $F_\alpha(t)=1-e^{-\lambda t}=1-e^{-2t}$, $t\geq 0$

  e $F_\beta(t)=1-e^{-\mu t}=1-e^{-1.5t}$, $t\geq 0$

  struttura di temporizzazione stocastica.

ii) Lo stato iniziale e' $X_0=x_0=0$. Dunque:

$$P(X_1=0)=P(X_1=0|X_0=0)$$
$$=P(X_1=0|X_0=0,E_1=\alpha)P(E_1=\alpha|X_0=0)$$
$$=p(0|0,\alpha)\cdot\frac{\lambda}{\lambda+\mu}=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{2+\frac{3}{2}}=\frac{8}{35}\simeq 0.2286$$

$$P(X_1=1)=P(X_1=1|X_0=0)$$
$$=P(X_1=1|X_0=0,E_1=\alpha)P(E_1=\alpha|X_0=0)$$
$$=p(1|0,\alpha)\frac{\lambda}{\lambda+\mu}=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{2+\frac{3}{2}}=\frac{12}{35}\simeq 0.3428$$

$$P(X_1=2)=1-P(X_1=0)-P(X_1=1)=1-\frac{8}{35}-\frac{12}{35}=\frac{15}{35}=\frac{3}{7}\simeq 0.4286$$

iii) Gli eventi $\alpha$ e $\beta$ sono <u>sempre</u> possibili. Dunque la durata dell'intervallo tra due eventi consecutivi segue una distribuzione indipendente dallo stato corrente dell'automa. In particolare,

$Y^* \sim$ distribuzione esponenziale con parametro $\lambda+\mu$

variabile aleatoria che descrive la durata dell'intervallo tra due eventi consecutivi

Sovrapposizione di Processi di Poisson!

Dunque: $E[Y^*] = \dfrac{1}{\lambda+\mu} = \dfrac{1}{2+\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{7} \simeq 0.2857$

iv) Gli eventi $\alpha$ e $\beta$ sono <u>sempre</u> possibili e <u>indipendenti</u>. Dunque:

$P($ 4 eventi $\alpha$ <u>e</u> nessun evento $\beta$ in $t_1$ secondi $) =$

$= P($4 eventi $\alpha$ in $t_1$ secondi$)\, P($0 eventi $\beta$ in $t_1$ secondi$)$

$$= \frac{(\lambda t_1)^4}{4!} e^{-\lambda t_1} \cdot \frac{(\mu t_1)^0}{0!} e^{-\mu t_1} = \frac{(\lambda t_1)^4}{4!} e^{-(\lambda+\mu)t_1} \simeq 0.0072$$

v) Per l'automa considerato, la probabilità richiesta coincide con:

$$P(Y_\beta \leqslant t_2) = 1 - e^{-\mu t_2} \simeq 0.6988$$

durata di vita residua dell'evento $\beta$

vi) La probabilità richiesta coincide con:

$$P(X_2=2, X_1=1 \mid X_0=0) + P(X_2=1, X_1=2 \mid X_0=0) =$$

$$= P(X_2=2 \mid X_1=1, X_0=0)\, P(X_1=1 \mid X_0=0) +$$

$$+ P(X_2=1 \mid X_1=2, X_0=0)\, P(X_1=2 \mid X_0=0)$$

calcolate al punto ii)

$$= P(E_2=\alpha \mid X_1=1)\, P(X_1=1 \mid X_0=0) + P(E_2=\beta \mid X_1=2)\, P(X_1=2 \mid X_0=0)$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot p(1 \mid 0,\alpha) \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot \frac{\mu}{\lambda+\mu} = p(1 \mid 0,\alpha) \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2$$

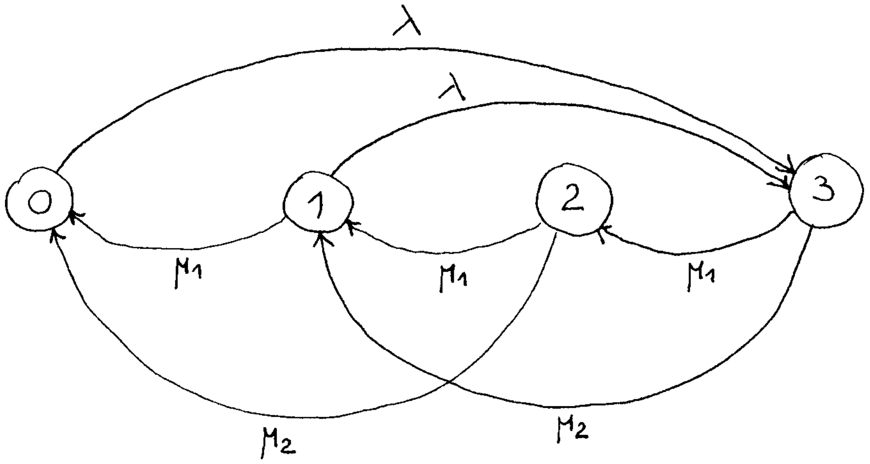
$$= \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{93}{245} \simeq 0.3796$$

## Esercizio 3

L'evasione di una richiesta di approvvigionamento ha una durata con distribuzione esponenziale il cui tasso è

$$\lambda = \frac{1}{0.025} = 40 \text{ richieste/giorno}$$

i) Definiamo come <u>stato</u> della catena di Markov il numero di prodotti in magazzino.




matrice dei tassi di transizione:

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \lambda \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda) & 0 & \lambda \\ \mu_2 & \mu_1 & -(\mu_1+\mu_2) & 0 \\ 0 & \mu_2 & \mu_1 & -(\mu_1+\mu_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 0 & 0 & 40 \\ 2 & -42 & 0 & 40 \\ 10 & 2 & -12 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & -12 \end{bmatrix}$$

ii) Calcoliamo le probabilità a regime risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \Pi Q = 0 \\ \sum_{i=0}^{3} \Pi_i = 1 \end{cases}$$

di queste equazioni, ne scartiamo una (per es., la seconda) perché ridondante

$$\begin{cases} -40\pi_0 + 2\pi_1 + 10\pi_2 = 0 \\ -12\pi_2 + 2\pi_3 = 0 \\ 40\pi_0 + 40\pi_1 - 12\pi_3 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_3 = 6\pi_2 & \text{(dalla } 2^a \text{ eq.)} \\ 42\pi_1 + 10\pi_2 - 12\pi_3 = 0 & \text{(sommando la } 1^a \text{ e } 3^a \text{ eq.)} \\ 40\pi_0 + 40\pi_1 - 12\pi_3 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_3 = 6\pi_2 \\ \pi_1 = \dfrac{31}{21}\pi_2 & \text{(sostituendo la } 1^a \text{ eq. nella } 2^a) \\ 40\pi_0 + 40\pi_1 - 12\pi_3 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_3 = 6\pi_2 \\ \pi_1 = \dfrac{31}{21}\pi_2 \\ \pi_0 = \dfrac{34}{105}\pi_2 & \text{(sostituendo la } 1^a \text{ e } 2^a \text{ eq. nella } 3^a) \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

Sostituendo la $1^a$, $2^a$ e $3^a$ eq. nella $4^a$:

$$\frac{34}{105}\pi_2 + \frac{31}{21}\pi_2 + \pi_2 + 6\pi_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{34 + 155 + 735}{105}\pi_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \pi_2 = \frac{5}{44}$$

Da cui:

$$\pi_0 = \frac{34}{105} \cdot \frac{5}{44} = \frac{17}{462} \quad , \quad \pi_1 = \frac{31}{21} \cdot \frac{5}{44} = \frac{155}{924} \quad , \quad \pi_3 = 6 \cdot \frac{5}{44} = \frac{15}{22}$$

Il numero $X$ medio di prodotti in magazzino a regime risulta:

$$E[X] = 0 \cdot \pi_0 + 1 \cdot \pi_1 + 2 \cdot \pi_2 + 3 \cdot \pi_3 = \frac{155}{924} + 2 \cdot \frac{5}{44} + 3 \cdot \frac{15}{22} = \frac{205}{84} \simeq 2.44$$

iii) P(ordine inevaso) =

= P((lo stato è $X=0$ e arriva un ordine singolo o doppio) ∪

∪ (lo stato è $X=1$ e arriva un ordine doppio)) = eventi disgiunti

= P(lo stato è $X=0$ e arriva un ordine singolo o doppio) +

+ P(lo stato è $X=1$ e arriva un ordine doppio) =

= P(arriva un ordine singolo o doppio | $X=0$) P($X=0$) +

+ P(arriva un ordine doppio | $X=1$) P($X=1$) =

$$= \frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1+\mu_2+\lambda} \cdot \pi_0 + \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2+\lambda} \cdot \pi_1 = \frac{12}{52} \cdot \frac{17}{462} + \frac{10}{52} \cdot \frac{155}{924} =$$

$$= \frac{89}{2184} = 0.0408$$

## Esercizio 4

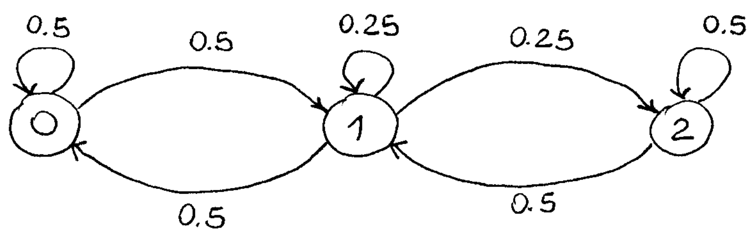
i) Definiamo i seguenti stati per la catena di Markov:

0 : soleggiato

1 : nuvoloso

2 : piovoso

Il grafo di transizione relativo e' il seguente:




La matrice di transizione corrispondente e':

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

ii) Calcoliamo le probabilita' a regime risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \pi Q = \pi \\ \sum_{i=0}^{2} \pi_i = 1 \end{cases}$$

di queste equazioni, ne scartiamo una (per es, la seconda) perche' ridondante

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 = \pi_0 \\ \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 = \pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = \pi_1 \\ \pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

Sostituendo la 1ª e 2ª eq. nella 3ª, otteniamo:

$$\pi_1 + \pi_1 + \frac{1}{2}\pi_1 = 1 \Rightarrow \frac{5}{2}\pi_1 = 1 \Rightarrow \pi_1 = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \pi_0 = \frac{2}{5}, \quad \pi_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

iii) La probabilità richiesta coincide con la probabilità che il <u>tempo di soggiorno</u> nello stato 0 (=soleggiato) sia pari a 3. Dunque:

$$P\left(V(0)=3\right) = p_{0,0}^2\,(1-p_{0,0}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} = 0.125$$

iv) La probabilità richiesta coincide con l'elemento di posto (0,1) nella matrice $H(3) = P^3$ (matrice di transizione in 3 passi).

$$\rightsquigarrow H(3) = P^3 = P^2 \cdot P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & \frac{1}{2} & * \\ * & \frac{1}{4} & * \\ * & \frac{1}{2} & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & \frac{13}{32} & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow p_{0,1}(3) = \frac{13}{32} \simeq 0.4063$$

<u>NOTA</u> - * indica dei valori non necessari ai fini del nostro calcolo.