Esame di Sistemi ad Eventi Discreti - 18.12.2007

Esercizio 1 (prima parte)

In un linguaggio di programmazione, un *identificatore* è costituito da una lettera seguita da altre lettere o cifre; un *numero intero* è una sequenza di cifre, e un *numero decimale* è una sequenza di cifre seguita da un punto, seguito a sua volta da un'altra sequenza di cifre. Sono considerati numeri decimali sia il punto seguito da una sequenza di cifre, sia una sequenza di cifre seguita da un punto. I numeri possono essere preceduti da un segno.

L'analizzatore sintattico di un compilatore del linguaggio contiene una parte di codice per il riconoscimento di identificatori, numeri interi e decimali. Si progetti l'automa corrispondente a tale parte di codice e definito sull'alfabeto $\mathcal{E} = \{a, \ldots, z, 0, \ldots, 9, +, -, .\}$.

Esercizio 2 (prima parte)

Una CPU è formata da due processori identici in parallelo. I due processori non hanno spazio di accodamento. Se un processo arriva, e trova uno dei due processori libero, allora viene eseguito; altrimenti, viene marcato come *respinto*. Si assume che gli arrivi di nuovi processi (cioè processi che richiedono servizio per la prima volta) siano di tipo Poissoniano con tasso $\lambda = 0.5$ arrivi/μsec, e che i tempi di servizio dei processori seguano una distribuzione esponenziale con valore atteso 1.6 μsec. Si assume, inoltre, che ciascun processo respinto ritorni indipendentemente a chiedere servizio dopo un tempo che segue una distribuzione esponenziale con parametro $\lambda_r = \rho\lambda$, dove ρ è una costante positiva.

i) Supponendo che la CPU sia inizialmente vuota e nessun processo sia stato respinto, modellizzare il sistema come un automa a stati, di cui si richiede di fornire la quintupla $\{\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, f, x_0\}$. Non è richiesto di disegnare il grafo dell'automa.

ii) Determinare la costante ρ in maniera tale che la probabilità che il primo cliente respinto torni a richiedere servizio alla CPU prima dell'arrivo di un nuovo processo, sia uguale a 0.8.

iii) Con il valore di ρ determinato al punto *ii*), calcolare la probabilità che non si verifichino arrivi (di entrambi i tipi) in 1 μsec, noto che c'è un solo processo respinto e non ancora servito. Tale probabilità cambia se i processi respinti e non ancora serviti sono $n > 1$?

iv) Se entrambi i processori sono impegnati, e ci sono n processi respinti e non ancora serviti, calcolare la probabilità che, dopo il verificarsi del prossimo evento, ci siano ancora n processi respinti e non ancora serviti. Assumere n intero positivo, e utilizzare il valore di ρ determinato al punto *ii*). Quanto deve valere n affinché la probabilità richiesta sia almeno 0.95?

Esercizio 3 (seconda parte)

Due giocatori A e B giocano nel modo seguente. Quando è il suo turno, A lancia un dado. Se il risultato è pari, A mantiene il turno. Altrimenti, lancia di nuovo il dado, e mantiene il turno se il risultato del secondo lancio è maggiore del risultato del primo lancio. Quando è il suo turno, B lancia due dadi contemporaneamente, e mantiene il turno se la somma dei due risultati è minore di 9.

i) Mostrare che il gioco può essere modellizzato come una catena di Markov a tempo discreto, di cui si chiede di calcolare la matrice di transizione.

ii) Calcolare la probabilità che A mantenga il turno esattamente 3 volte consecutive.

iii) I due giocatori decidono che vincerà chi avrà il turno dopo 3 giocate. Se A vuole vincere, gli conviene iniziare il gioco, o lasciare la prima giocata all'avversario?

iv) Con riferimento al punto *iii*), esiste un numero di giocate oltre il quale A è favorito indipendentemente dal fatto se comincia lui il gioco o meno?

Esercizio 4 (seconda parte)

Il sistema di monitoraggio della pressione all'interno di un serbatoio si pone in stato di allerta quando la pressione supera una certa soglia. Se la pressione supera una ulteriore soglia, il sistema va in emergenza, e viene azionata una valvola per riportare la pressione a valori regolari. Da misure sul sistema, risulta che:

- il sistema resta mediamente nello stato di funzionamento regolare per $\bar{t}_r = 500$ sec;
- il sistema resta mediamente nello stato di allerta per $\bar{t}_a = 2$ sec, e ritorna nello stato di funzionamento regolare con probabilità 0.8;
- il sistema resta mediamente nello stato di emergenza per $\bar{t}_e = 5$ sec.

Assumendo tempi di soggiorno negli stati di tipo esponenziale:

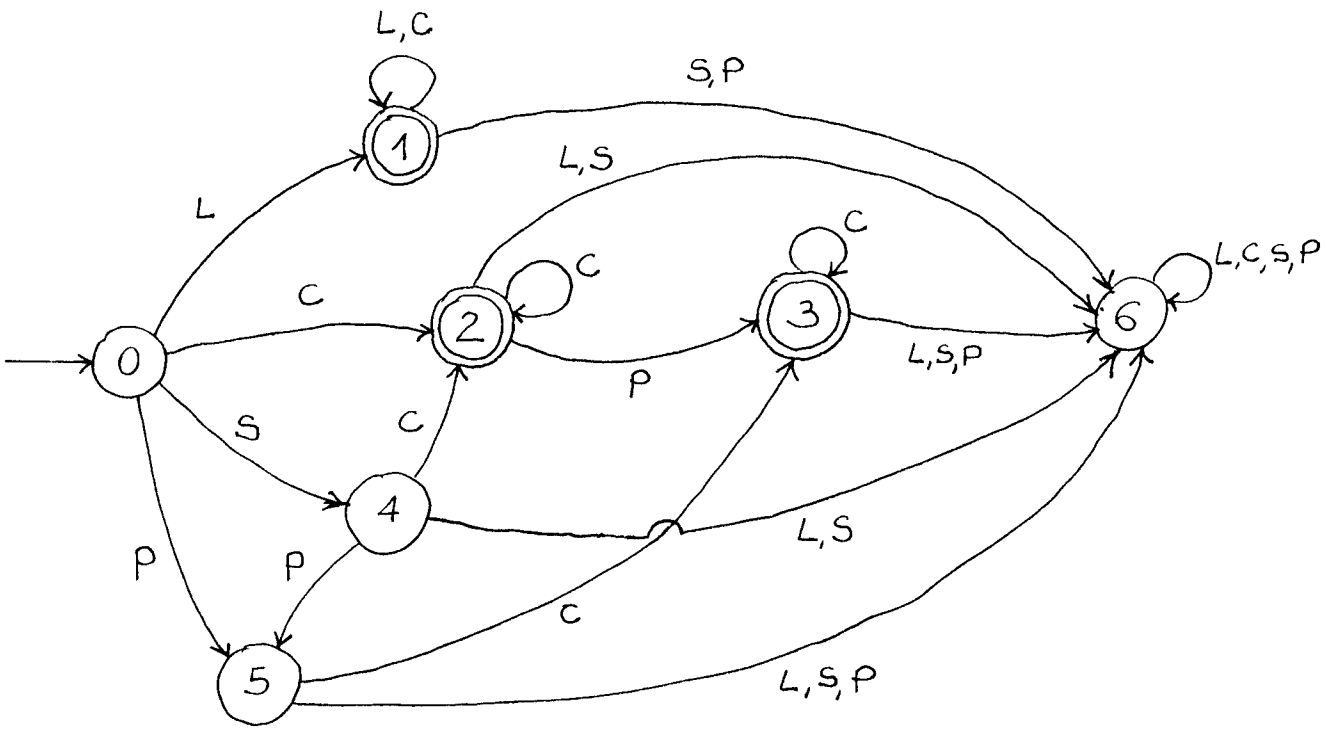
i) Modellizzare il funzionamento del sistema come una catena di Markov a tempo continuo, di cui si chiede di calcolare sia la matrice dei tassi di transizione che la matrice delle probabilità a un passo.

ii) Calcolare la probabilità a regime di tutti gli stati.

iii) Al fine di minimizzare i falsi allarmi, un segnale luminoso viene azionato solo quando il sistema resta in allerta per almeno 2 sec. Se il sistema è in allerta, calcolare la probabilità che il sistema ritorni nello stato di funzionamento regolare senza che il segnale luminoso si accenda.

Esercizio 1

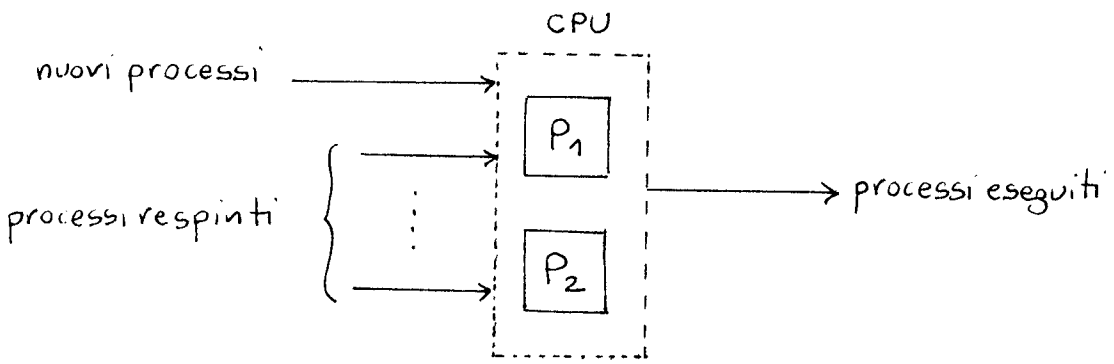
Per compattezza, indichiamo con L una lettera, con C una cifra, con S un segno e con P un punto. L'automa richiesto è il seguente:



Si osservi che lo stato 1 rappresenta un identificatore, lo stato 2 rappresenta un numero intero e lo stato 3 rappresenta un numero decimale. Gli altri stati rappresentano stringhe non valide.

Esercizio 2

Il sistema può essere rappresentato graficamente come segue:



i) Modellizzazione come automa a stati $(\mathcal{E}, X, \Gamma, f, x_0)$

- insieme degli eventi: $\mathcal{E} = \{a, r, d\}$

  dove:

  a = arrivo di un nuovo processo

  r = ritorno di un processo precedentemente respinto

  d = completamento dell'esecuzione di un processo

- stato: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

  dove:

  x_1 = numero di processori occupati $\Rightarrow x_1 \in \{0,1,2\}$

  x_2 = numero di processi respinti e non ancora serviti

  $\Rightarrow x_2 \in \{0,1,2,3,\dots\}$

spazio di stato: $X = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_1 \in \{0,1,2\},\ x_2 \in \{0,1,2,3,\dots\} \right\}$

- eventi possibili in ciascuno stato

$\Gamma\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \{a\}$

$\Gamma\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \{a, d\} \quad \forall x_1 = 1,2$

$\Gamma\left(\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \{a, r\} \quad \forall x_2 = 1,2,3,\dots$

$\Gamma\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \{a, r, d\} \quad \forall x_1 = 1,2,\ x_2 = 1,2,3,\dots$

- funzione di transizione dello stato

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, a\right) = \begin{bmatrix} x_1+1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \forall x_1 = 0,1 \;,\; x_2 = 0,1,2,3,\ldots$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ x_2 \end{bmatrix}, a\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ x_2+1 \end{bmatrix} \quad \forall x_2 = 0,1,2,3,\ldots$$

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, r\right) = \begin{bmatrix} x_1+1 \\ x_2-1 \end{bmatrix} \quad \forall x_1 = 0,1 \;,\; x_2 = 1,2,3,\ldots$$

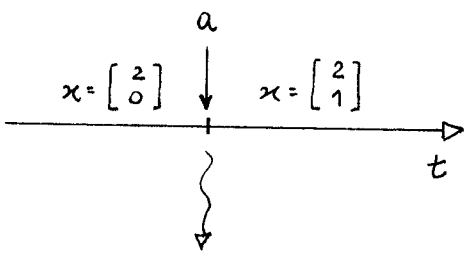
$$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ x_2 \end{bmatrix}, r\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \forall x_2 = 1,2,3,\ldots$$

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, d\right) = \begin{bmatrix} x_1-1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \forall x_1 = 1,2 \;,\; x_2 = 0,1,2,3,\ldots$$

- condizione iniziale

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ii) Dal punto di vista temporale, siamo nella situazione seguente:



In questo istante, vengono programmate sia la durata di vita V_a di un nuovo arrivo che la durata di vita V_r del ritorno del cliente respinto.

La probabilità richiesta è dunque:

$$P\left(V_r < V_a \mid X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{\lambda_r}{\lambda + \lambda_r} = \frac{\rho\lambda}{\lambda + \rho\lambda} = \frac{\rho}{1+\rho} = 0.8$$

ATTENZIONE: non ci interessa quando avviene il completamento di un servizio da parte di un processore. Gli unici eventi "concorrenti" al calcolo della probabilità richiesta sono a e r.

Da cui, $\rho = 4$.

iii) La probabilità richiesta è

$$P\left(\text{nessun arrivo in } 1\,\mu\text{sec} \,\middle|\, X=\begin{bmatrix}*\\1\end{bmatrix}\right) = P\left((Y_a>1)\cap(Y_r>1)\,\middle|\, X=\begin{bmatrix}*\\1\end{bmatrix}\right)$$

dove Y_a è la durata di vita residua di un nuovo arrivo e Y_r è la durata di vita residua del ritorno del cliente respinto.

Dato che $Y_a \sim 1-e^{-\lambda t}$ e $Y_r \sim 1-e^{-\lambda_r t}$, e Y_a e Y_r sono indipendenti, abbiamo:

$$P\left((Y_a>1)\cap(Y_r>1)\,\middle|\, X=\begin{bmatrix}*\\1\end{bmatrix}\right) = e^{-\lambda}\cdot e^{-\lambda_r} = e^{-(1+\rho)\lambda} = e^{-2.5} \simeq 0.082$$

Se i processi respinti e non ancora serviti sono $n>1$, la probabilità richiesta è ancora, formalmente:

$$P\left(\text{nessun arrivo in } 1\,\mu\text{sec} \,\middle|\, X=\begin{bmatrix}*\\n\end{bmatrix}\right) = P\left((Y_a>1)\cap(Y_r>1)\,\middle|\, X=\begin{bmatrix}*\\n\end{bmatrix}\right)$$

ma in questo caso, dato che ci sono n processi respinti che <u>indipendentemente</u> programmano di ritornare a richiedere servizio alla CPU, si ha

$$Y_r = \min_{i=1,\dots,n} Y_r(i)$$

dove $Y_r(i) \sim 1-e^{-\lambda_r t}$ è la durata di vita residua del ritorno dell'i-esimo cliente tra quelli respinti e che devono ancora essere serviti.

Sappiamo dunque (=> vedi la sovrapposizione di processi di Poisson) che

$$Y_r \sim 1-e^{-n\lambda_r t}$$

λ_r sommato n volte

e quindi

$$P\left((Y_a>1)\cap(Y_r>1)\,\middle|\, X=\begin{bmatrix}*\\n\end{bmatrix}\right) = e^{-\lambda}\cdot e^{-n\lambda_r} = e^{-(1+n\rho)\lambda}$$

<u>dipende da n</u>

iv) La probabilità richiesta è

$$P\left((E_{k+1}=r)\cup(E_{k+1}=d)\,\middle|\,X_k=\begin{bmatrix}2\\n\end{bmatrix}\right)=\frac{n\lambda_r+2\mu}{\lambda+n\lambda_r+2\mu}$$

$$=\frac{1.25+2n}{1.75+2n}>0.95 \quad\Rightarrow\quad \underline{n>4}$$

Esercizio 3

i) Consideriamo il turno di A.

Chiamiamo p la probabilità che A passi il turno, X_1 il risultato del primo lancio e X_2 il risultato dell'eventuale secondo lancio.

$$1-p=P\left((X_1 \text{ è pari})\cup(X_1 \text{ è dispari}\cap X_2>X_1)\right)$$

$$=P(X_1 \text{ è pari})+P(X_1 \text{ è dispari}\cap X_2>X_1)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{9}{36}=\frac{3}{4}$$

→ probabilità delle coppie $(X_1,X_2)=(1,2),(1,3),\dots,(1,6)$ $(3,4),(3,5),(3,6)$ $(5,6)$

$$\Rightarrow p=\frac{1}{4}$$

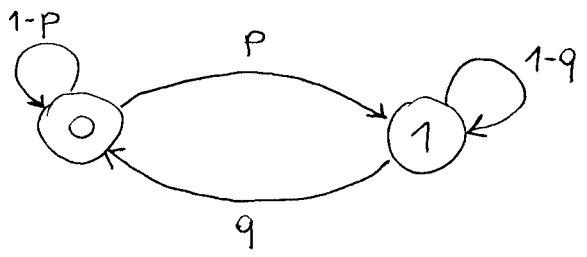
Consideriamo il turno di B.

Chiamiamo q la probabilità che B passi il turno, X_1 e X_2 i risultati del lancio dei due dadi.

$$q=P(X_1+X_2\geq 9)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18} \quad\Rightarrow\quad 1-q=\frac{13}{18}$$

↓ probabilità delle coppie $(X_1,X_2)=(3,6),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),$ $(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)$

Il gioco può essere modellizzato come una catena di Markov a tempo discreto con due stati:



dove lo stato 0 corrisponde al turno di A e lo stato 1 corrisponde al turno di B. La corrispondente matrice di transizione a un passo è:

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{18} & \frac{13}{18} \end{bmatrix}$$

ii) È la probabilità che il <u>tempo di soggiorno</u> nello stato 0 sia uguale a 4.

Quindi:

$$P(V(0)=4) = (1-p)^3 p = \frac{27}{256} \simeq 0.1055$$

↓ distribuzione geometrica

iii) È richiesto di valutare la probabilità $\Pi_0(3)$ in corrispondenza delle condizioni iniziali $\Pi(0)=[1 \;\; 0]$ e $\Pi(0)=[0 \;\; 1]$.

↓ A comincia il gioco ↓ B comincia il gioco

Con $\Pi(0)=[1 \;\; 0]$:

$$\Pi(3) = \Pi(0) P^3 = \left[\frac{518}{899} \;\; \frac{381}{899} \right] \simeq [0.5762 \;\; 0.4238]$$

$$\Rightarrow \Pi_0(3) \simeq 0.5762$$

Con $\Pi(0)=[0 \;\; 1]$:

$$\Pi(3) = \Pi(0) P^3 = \left[\frac{817}{1735} \;\; \frac{918}{1735} \right] \simeq [0.4709 \;\; 0.5291]$$

$$\Rightarrow \Pi_0(3) \simeq 0.4709$$

Quindi ad A conviene iniziare il gioco.

iv) Osserviamo che, già per $k=4$:

Con $\pi(0) = [1 \ 0]$:

$$\pi(4) = \pi(0)P^4 = \left[\frac{849}{1544} \quad \frac{695}{1544} \right] \simeq [0.5499 \ \ 0.4501]$$

$$\Rightarrow \pi_0(4) \simeq 0.5499$$

Con $\pi(0) = [0 \ 1]$:

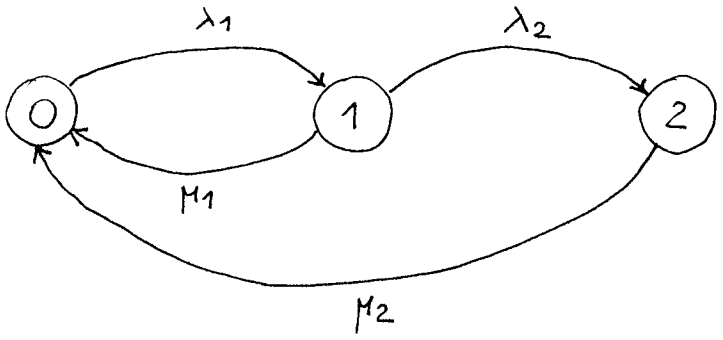
$$\pi(4) = \pi(0)P^4 = \left[\frac{1736}{3471} \quad \frac{1735}{3471} \right] \simeq [0.5001 \ \ 0.4999]$$

$$\Rightarrow \pi_0(4) \simeq 0.5001$$

Quindi per numeri di giocate superiori a 3, il giocatore A è sempre favorito.

Esercizio 4

i) Il sistema può essere modellizzato come una catena di Markov a tempo continuo con tre stati:



NOTA: la pressione è una funzione continua, per questo non si ha transizione diretta da 0 a 2. Invece, si ha transizione diretta da 2 a 0 perché l'apertura della valvola determina, in prima approssimazione, una variazione istantanea di pressione (τ è il tempo medio di risposta della valvola)

dove lo stato 0 corrisponde al funzionamento regolare, lo stato 1 all'allerta e lo stato 2 all'emergenza.

Per la catena di Markov illustrata, la matrice dei tassi di transizione Q e la matrice delle probabilità a un passo P, sono rispettivamente:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{0,0} & q_{0,1} & q_{0,2} \\ q_{1,0} & q_{1,1} & q_{1,2} \\ q_{2,0} & q_{2,1} & q_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & \\ \mu_1 & -(\lambda_2+\mu_1) & \lambda_2 \\ \mu_2 & 0 & -\mu_2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{q_{0,1}}{q_{0,0}} & -\frac{q_{0,2}}{q_{0,0}} \\ -\frac{q_{1,0}}{q_{1,1}} & 0 & -\frac{q_{1,2}}{q_{1,1}} \\ -\frac{q_{2,0}}{q_{2,2}} & -\frac{q_{2,1}}{q_{2,2}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\mu_1}{\lambda_2+\mu_1} & 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu_1} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dai dati del problema ricaviamo che:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\bar{t}_r} = \frac{1}{500} = 0.002$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\bar{t}_e} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$\lambda_2+\mu_1 = \frac{1}{\bar{t}_a} \quad e \quad \frac{\mu_1}{\lambda_2+\mu_1} = 0.8 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 = 0.8\cdot(\lambda_2+\mu_1) = \frac{0.8}{\bar{t}_a} = 0.4$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{\bar{t}_a} - \mu_1 = 0.5 - 0.4 = 0.1$$

ii) Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} [\bar{\pi}_0 \ \bar{\pi}_1 \ \bar{\pi}_2]\, Q = 0 \\ \bar{\pi}_0+\bar{\pi}_1+\bar{\pi}_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda_1\bar{\pi}_0 + \mu_1\bar{\pi}_1 + \mu_2\bar{\pi}_2 = 0 \\ \lambda_2\bar{\pi}_1 - \mu_2\bar{\pi}_2 = 0 \\ \bar{\pi}_0+\bar{\pi}_1+\bar{\pi}_2 = 1 \end{cases}$$

↓ abbiamo omesso un'equazione sicuramente ridondante

$$\Rightarrow \begin{cases} -\lambda_1\bar{\pi}_0 + (\lambda_2+\mu_1)\bar{\pi}_1 = 0 \\ \lambda_2\bar{\pi}_1 - \mu_2\bar{\pi}_2 = 0 \\ \bar{\pi}_0+\bar{\pi}_1+\bar{\pi}_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = \dfrac{\lambda_2+\mu_1}{\lambda_1}\pi_1 \\ \pi_2 = \dfrac{\lambda_2}{\mu_2}\pi_1 \\ \dfrac{\lambda_2+\mu_1}{\lambda_1}\pi_1 + \pi_1 + \dfrac{\lambda_2}{\mu_2}\pi_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \pi_1 = \frac{1}{1+\frac{\lambda_2}{\mu_2}+\frac{\lambda_2+\mu_1}{\lambda_1}}$$

Sostituendo i valori numerici:

$$\pi_0 = \frac{500}{503} \simeq 0.9940$$

$$\pi_1 = \frac{2}{503} \simeq 0.004$$

$$\pi_2 = \frac{1}{503} \simeq 0.002$$

iii) Indichiamo con $V_{1,0}$ la durata di vita dell'evento di transizione da 1 a 0, e con $V_{1,2}$ la durata di vita dell'evento di transizione da 1 a 2. Ricordiamo che $V_{1,0}$ segue la densità esponenziale $f(t) = \mu_1 e^{-\mu_1 t}$, mentre $V_{1,2}$ segue la densità esponenziale $g(t) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$ $(t \geq 0)$. La probabilità richiesta è

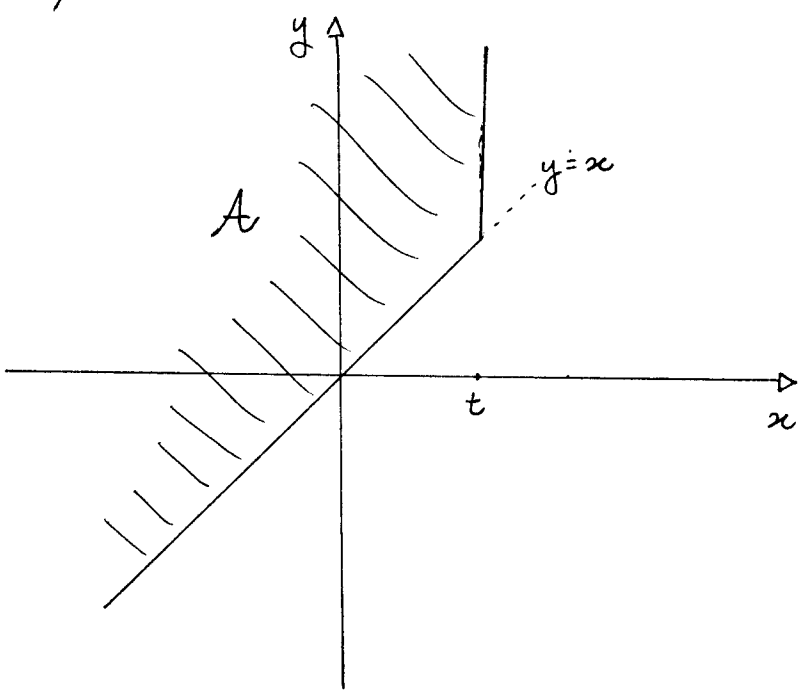
$$P\left(V_{1,0} < V_{1,2} \ \underline{e} \ V_{1,0} < t \mid X=1\right) \quad \rightsquigarrow \text{da valutare in } t=2$$

$$= \iint_A f(x)g(y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{t} f(x)\left[\int_{x}^{+\infty} g(y)\,dy\right]dx$$

$$= \int_0^t \mu_1 e^{-\mu_1} \cdot e^{-\lambda_2 x}\,dx$$

$$= \mu_1 \int_0^t e^{-(\mu_1+\lambda_2)x}\,dx$$



$$= \mu_1 \left[-\frac{e^{-(\mu_1+\lambda_2)x}}{\mu_1+\lambda_2} \right]_0^t = \frac{\mu_1}{\mu_1+\lambda_2} \left[1 - e^{-(\mu_1+\lambda_2)t} \right]$$

Per $t=2$, il valore della probabilità è 0.5057.