Recupero I Prova in Itinere di Sistemi ad Eventi Discreti - 11.12.2007

Esercizio 1

Costruire un automa a stati finiti con numero minimo di stati che riconosca il linguaggio definito sull'alfabeto $\mathcal{E} = \{a, b, c\}$ e tale che:

1. la stringa vuota non appartiene al linguaggio;
2. le stringhe appartenenti al linguaggio non contengono le sottosequenze *abc* e *bbc*.

Esercizio 2

Uno sportello bancario ammette solo un cliente in coda oltre a quello che sta ricevendo il servizio. I servizi richiesti dai clienti sono classificati secondo due livelli di priorità: i servizi di tipo 1 hanno priorità maggiore, e pertanto un servizio di tipo 2 può essere interrotto all'arrivo di un cliente che richiede un servizio di tipo 1. In questo caso, il cliente che stava ricevendo il servizio di tipo 2 interrotto, ritorna in coda e attende che termini il servizio di tipo 1. Quando il cliente ritorna ad essere servito, il suo servizio inizia da dove era stato interrotto (questo significa che, se per esempio il servizio richiede x minuti, e viene interrotto dopo y minuti, alla ripresa durerà ancora per $x - y$ minuti).

i) Noto che i servizi di tipo 1 richiedono 5 minuti, e quelli di tipo 2 richiedono 7 minuti, determinare il diagramma temporale del sistema corrispondente alle seguenti sequenze di temporizzazione per i clienti che richiedono servizi di tipo 1 e 2, rispettivamente (si suppone che non ci siano altri arrivi tranne quelli programmati):

$$\begin{aligned} V_{a_1} &= \{2, 6\} \\ V_{a_2} &= \{3, 8\} \end{aligned}$$

Assumere poi che tutti gli eventi del sistema sono indipendenti, con durate di vita che seguono distribuzioni esponenziali. I tassi sono $\lambda_{a_1} = 0.25$ arrivi/min per i clienti che richiedono un servizio di tipo 1, $\lambda_{a_2} = 0.15$ arrivi/min per i clienti che richiedono un servizio di tipo 2, e $\mu_{d_1} = 0.1$ e $\mu_{d_2} = 0.2$ servizi/min per i clienti che richiedono servizi di tipo 1 e 2, rispettivamente.

ii) Considerare la seguente situazione. Un solo cliente è nel sistema, e tale cliente richiede un servizio di tipo 2. Prima del completamento del servizio, arriva un altro cliente che richiede un servizio di tipo 1. Il servizio del cliente iniziale viene dunque interrotto. Calcolare la probabilità che, alla ripresa del servizio, il cliente iniziale debba essere ancora servito per almeno 2 minuti.

iii) Se un solo cliente è nel sistema, e tale cliente richiede un servizio di tipo 2, calcolare la probabilità che il servizio non venga interrotto.

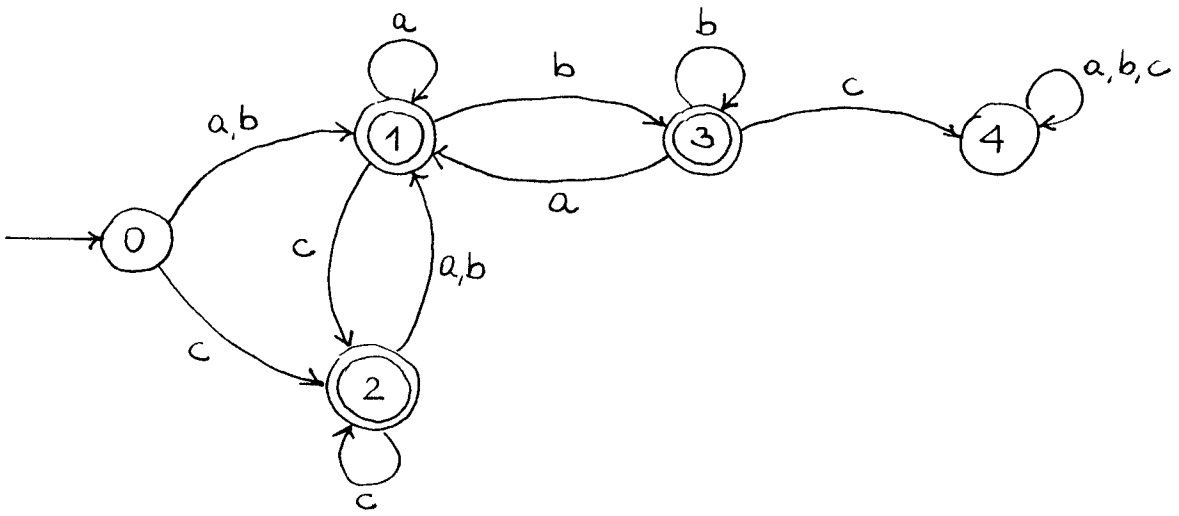
iv) Calcolare la probabilità che, durante il servizio di un cliente con priorità alta, avvengano esattamente 3 arrivi di clienti, indipendentemente dal tipo di servizio richiesto.

v) Calcolare la probabilità che lo sportello si svuoti, noto che c'è un solo cliente nel sistema.

Soluzioni

Esercizio 1

Il linguaggio considerato è costituito da tutte le stringhe che possono essere formate con i simboli a, b e c, tranne la stringa vuota e le stringhe che contengono la sottosequenza abc o la sottosequenza bbc.
L'automa richiesto è il seguente:



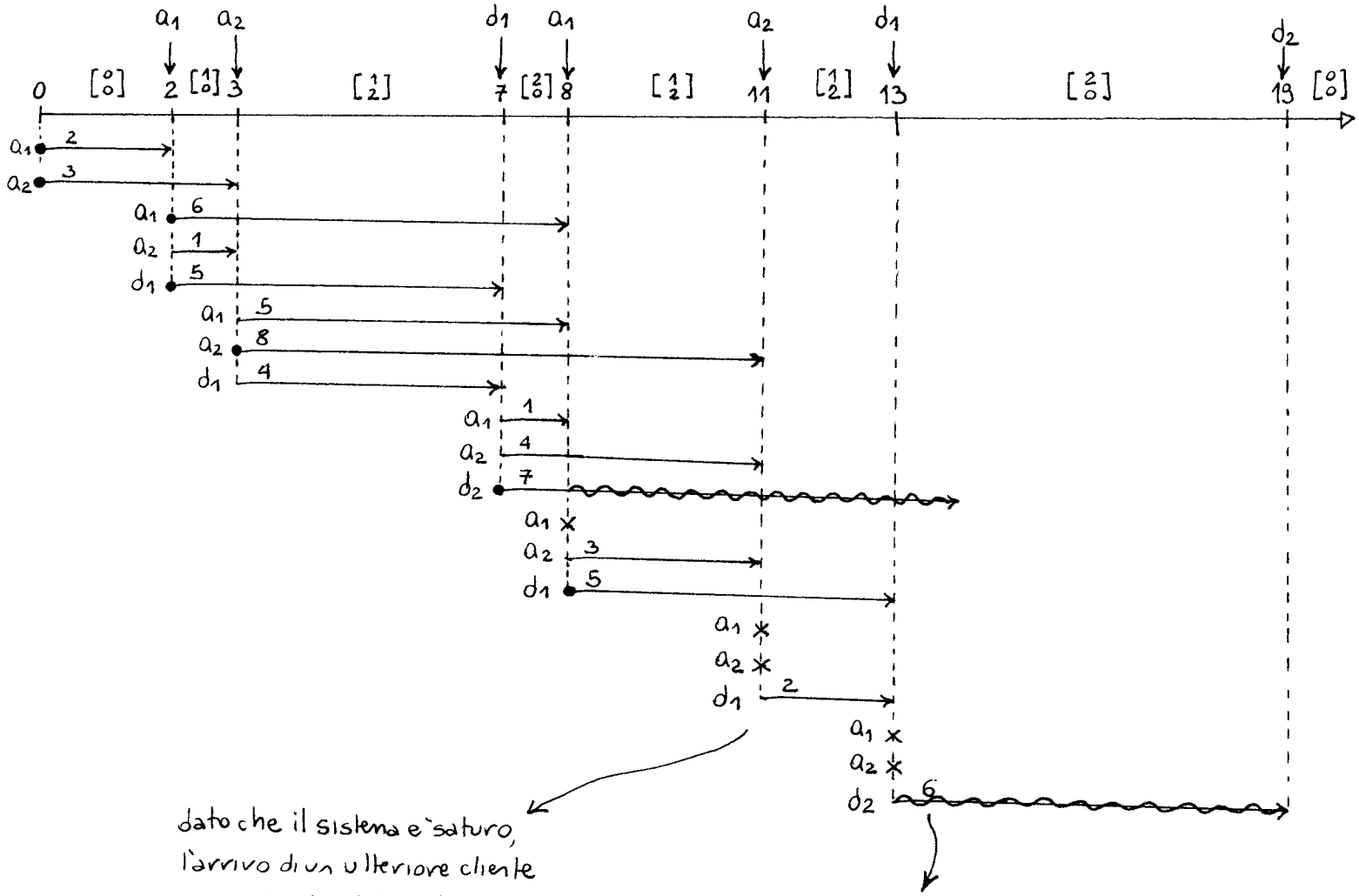
Gli stati 1, 2 e 3 sono stati finali. Lo stato 0 non è finale perché la stringa vuota non appartiene al linguaggio. Lo stato 4 raccoglie tutte le stringhe che contengono abc o bbc come sottosequenze.

Esercizio 2

Definiamo lo stato del sistema come $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, dove x_1 rappresenta il tipo di servizio richiesto dal cliente allo sportello, e x_2 rappresenta il tipo di servizio richiesto dal cliente in coda. Si usa il valore 0 per indicare nessun cliente.
L'insieme degli eventi è $\mathcal{E} = \{a_1, a_2, d_1, d_2\}$, dove:

- a_i = arrivo di un cliente che richiede un servizio di tipo i, $i = 1, 2$.
- d_i = partenza di un cliente che ha richiesto un servizio di tipo i, $i = 1, 2$.

i) Il diagramma temporale del sistema è il seguente:



dato che il sistema e' saturo, l'arrivo di un ulteriore cliente non cambia lo stato del sistema (il cliente viene respinto).

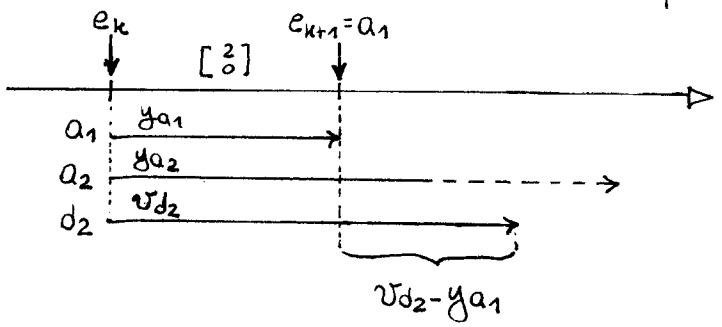
dato che c'e' stata preemption, quando il cliente di tipo 2 rientra in servizio, gli viene associato il corrispondente tempo di servizio residuo all'istante dell'interruzione.

NOTA: si usa X per indicare un evento che non viene piu' riprogrammato (corrisponde a una durata di vita infinita).

ii) La probabilita' richiesta e'

$$P\left(V_{d_2} - Y_{a_1} \geq 2 \mid X_k = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } E_{k+1} = a_1\right)$$

essendo V_{d_2} la durata di vita complessiva dell'evento di servizio di tipo 2, e Y_{a_1} la durata di vita residua dell'evento di arrivo di tipo 1.



Osserviamo che $V_{d_2} - Y_{a_1}$ è proprio la durata di vita residua Y_{d_2} dell'evento d_2 al momento in cui a_1 si verifica. Sotto le ipotesi di durate di vita che seguono distribuzioni esponenziali, sappiamo che Y_{d_2} segue la stessa distribuzione di V_{d_2}. Quindi:

$$P\left(V_{d_2} - Y_{a_1} \geq 2 \,\middle|\, X_k = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } E_{k+1} = a_1\right)$$

$$= P\left(Y_{d_2} \geq 2 \text{ al momento in cui } a_1 \text{ accade}\right) = e^{-\mu_{d_2} \cdot 2} = e^{-0.4} \simeq 0.6703$$

iii) Se lo stato corrente è $X_k = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, il servizio del cliente non viene interrotto (cioè non avviene preemption) se e solo se il prossimo evento è la partenza del cliente servito (evento d_2), oppure è l'arrivo di un altro cliente che richiede un servizio di tipo 2 (evento a_2). Infatti, nel secondo caso, lo stato diventa $X_{k+1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, e non sono più possibili interruzioni del cliente in servizio perché il sistema non accetta nuovi arrivi. Dunque

$$P\left(\text{no interruzione} \,\middle|\, X_k = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = P\left(E_{k+1} = a_2 \,\middle|\, X_k = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + P\left(E_{k+1} = d_2 \,\middle|\, X_k = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{\lambda_{a_2}}{\lambda_{a_1} + \lambda_{a_2} + \mu_{d_2}} + \frac{\mu_{d_2}}{\lambda_{a_1} + \lambda_{a_2} + \mu_{d_2}} = \frac{\lambda_{a_2} + \mu_{d_2}}{\lambda_{a_1} + \lambda_{a_2} + \mu_{d_2}} \simeq 0.5833$$

iv) La probabilità cercata è la probabilità che si verifichi una delle sequenze di eventi $a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} d_1$, dove $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2\}$, noto che lo stato corrente è $X_k = \begin{bmatrix} 1 \\ * \end{bmatrix}$ ($*$ indica un valore ininfluente). Si ha che:

$$P\left(\text{sequenze } a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} d_1,\ i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2\} \,\middle|\, X_k = \begin{bmatrix} 1 \\ * \end{bmatrix}\right) =$$

$$= P\left(E_{k+4}=d_1,\ E_{k+3}=a_1 \underline{\text{oppure}}\ a_2,\ E_{k+2}=a_1 \underline{\text{oppure}}\ a_2,\ E_{k+1}=a_1 \underline{\text{oppure}}\ a_2 \,\middle|\, X_k=\begin{bmatrix}1*\end{bmatrix}\right)$$

$$= \dots$$

$$= P\left(E_{k+4}=d_1 \,\middle|\, X_{k+3}=\begin{bmatrix}1*\end{bmatrix}\right) P\left(E_{k+3}=a_1 \underline{\text{oppure}}\ a_2 \,\middle|\, X_{k+2}=\begin{bmatrix}1*\end{bmatrix}\right) \cdot$$

$$\cdot P\left(E_{k+2}=a_1 \underline{\text{oppure}}\ a_2 \,\middle|\, X_{k+1}=\begin{bmatrix}1*\end{bmatrix}\right) P\left(E_{k+1}=a_1 \underline{\text{oppure}}\ a_2 \,\middle|\, X_k=\begin{bmatrix}1*\end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{\mu_{d_1}}{\lambda_{a_1}+\lambda_{a_2}+\mu_{d_1}} \cdot \left(\frac{\lambda_{a_1}+\lambda_{a_2}}{\lambda_{a_1}+\lambda_{a_2}+\mu_{d_1}}\right)^3 \simeq 0.1024$$

NOTA - $*$ in probabilità diverse può rappresentare un valore diverso.

v) La probabilità cercata è:

$$P\left(X_{k+1}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \,\middle|\, X_k=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \underline{\text{oppure}}\ X_k=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{P\left\{X_{k+1}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \underline{\text{e}} \left(X_k=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \underline{\text{oppure}}\ X_k=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\right)\right\}}{P\left(X_k=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \underline{\text{oppure}}\ X_k=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\right)} =$$

$$= \frac{P\left(X_{k+1}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, X_k=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + P\left(X_{k+1}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, X_k=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\right)}{P\left(X_k=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + P\left(X_k=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\right)}$$

$$= \frac{P\left(X_{k+1}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \,\middle|\, X_k=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) P\left(X_k=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + P\left(X_{k+1}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \,\middle|\, X_k=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\right) P\left(X_k=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\right)}{P\left(X_k=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + P\left(X_k=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\right)}$$

Osserviamo che:

$$P\left(X_{k+1}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \,\middle|\, X_k=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = P\left(E_{k+1}=d_1 \,\middle|\, X_k=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \frac{\mu_{d_1}}{\lambda_{a_1}+\lambda_{a_2}+\mu_{d_1}}$$

$$P\left(X_{k+1}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \,\middle|\, X_k=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\right) = P\left(E_{k+1}=d_2 \,\middle|\, X_k=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\right) = \frac{\mu_{d_2}}{\lambda_{a_1}+\lambda_{a_2}+\mu_{d_2}}$$

mentre i valori $P\left(X_k = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$ e $P\left(X_k = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\right)$ sono in generale dipendenti dal tempo (ricordare le catene di Markov...)

Per esempio, partendo dalla condizione iniziale $X_0 = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, abbiamo, per $k=1$:

$$P\left(X_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \frac{\lambda a_1}{\lambda a_1 + \lambda a_2}$$

$$P\left(X_1 = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\right) = \frac{\lambda a_2}{\lambda a_1 + \lambda a_2}$$

e quindi

$$P\left(X_2 = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \mid X_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \underline{\text{oppure}}\ X_1 = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{\mu_{d_1}}{\lambda a_1 + \lambda a_2 + \mu_{d_1}} \cdot \frac{\lambda a_1}{\lambda a_1 + \lambda a_2} + \frac{\mu_{d_2}}{\lambda a_1 + \lambda a_2 + \mu_{d_2}} \cdot \frac{\lambda a_2}{\lambda a_1 + \lambda a_2} = 0.25$$

Ancora sul punto *ii*) ...

È un buon esercizio esplicitare i calcoli di $P\left(V_{d_2} - Y_{a_1} \geq t \mid X_k = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} \text{ e } E_{k+1} = a_1\right)$.

L'evento che condiziona $\left(X_k = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} \text{ e } E_{k+1} = a_1\right)$ ci dice che:

- gli eventi possibili nello stato corrente sono a_1, a_2 e d_2;
- se a_1 è il prossimo evento, allora risulta $Y_{a_2} \geq Y_{a_1}$ e $V_{d_2} \geq Y_{a_1}$.

Quindi la probabilità da calcolare è

$$P\left(V_{d_2} - Y_{a_1} \geq t \mid Y_{a_2} \geq Y_{a_1},\ V_{d_2} \geq Y_{a_1}\right)$$

↳ d'ora in poi, per semplicità di notazione, omettiamo il condizionamento rispetto all'evento $X_k = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$.

Applicando la definizione di probabilità condizionale, otteniamo:

$$P(V_{d_2} - Y_{a_1} \geq t \mid Y_{a_2} \geq Y_{a_1},\ V_{d_2} \geq Y_{a_1}) =$$

$$= \frac{P(Y_{a_2} \geq Y_{a_1},\ V_{d_2} \geq Y_{a_1},\ V_{d_2} \geq Y_{a_1} + t)}{P(Y_{a_2} \geq Y_{a_1},\ Y_{d_2} \geq Y_{a_1})} = \frac{P(Y_{a_2} \geq Y_{a_1},\ V_{d_2} \geq Y_{a_1} + t)}{P(Y_{a_2} \geq Y_{a_1},\ Y_{d_2} \geq Y_{a_1})}$$

La probabilità a denominatore la conosciamo:

$$P(Y_{a_2} \geq Y_{a_1},\ Y_{d_2} \geq Y_{a_1}) = P(\text{prossimo evento è } a_1) = \frac{\lambda_{a_1}}{\lambda_{a_1} + \lambda_{a_2} + \mu_{d_2}}$$

Per quanto riguarda la probabilità a numeratore, indicando con f_{d_2}, f_{a_1} e f_{a_2} le densità di probabilità (esponenziali) delle durate di vita degli eventi d_2, a_1 e a_2, rispettivamente, e ricordando che tali durate di vita sono variabili aleatorie indipendenti, otteniamo:

$$P(V_{d_2} \geq Y_{a_1} + t,\ Y_{a_2} \geq Y_{a_1}) = \iiint_{\mathcal{A}} f_{d_2}(x)\, f_{a_1}(y)\, f_{a_2}(z)\, dx\, dy\, dz$$

dove $\mathcal{A} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq y + t,\ z \geq y\}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{x-t} \left\{ \int_{y}^{+\infty} f_{d_2}(x)\, f_{a_1}(y)\, f_{a_2}(z)\, dz \right\} dy \right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{d_2}(x) \left[\int_{-\infty}^{x-t} f_{a_1}(y) \underbrace{\left\{ \int_{y}^{+\infty} f_{a_2}(z)\, dz \right\}}_{1 - F_{a_2}(y)} dy \right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{d_2}(x) \left[\int_{-\infty}^{x-t} f_{a_1}(y) \{1 - F_{a_2}(y)\}\, dy \right] dx$$

$$= \int_{t}^{+\infty} f_{d_2}(x) \left[\int_{0}^{x-t} \lambda_{a_1} e^{-\lambda_{a_1} y} \cdot e^{-\lambda_{a_2} y}\, dy \right] dx$$

NOTA: $f_{a_1}(y) = 0$ se $y < 0$, quindi consideriamo $x \geq t$. Inoltre, $t \geq 0$.

$$= \lambda_{a_1} \int_t^{+\infty} f_{d_2}(x) \left[- \frac{e^{-(\lambda_{a_1}+\lambda_{a_2})y}}{\lambda_{a_1}+\lambda_{a_2}} \right]_0^{x-t} dx$$

$$= \frac{\lambda_{a_1}}{\lambda_{a_1}+\lambda_{a_2}} \int_t^{+\infty} \mu_{d_2} e^{-\mu_{d_2} x} \cdot \left[1 - e^{-(\lambda_{a_1}+\lambda_{a_2})(x-t)} \right] dx$$

$$= \frac{\lambda_{a_1}}{\lambda_{a_1}+\lambda_{a_2}} \int_t^{+\infty} \left[\mu_{d_2} e^{-\mu_{d_2} x} - \mu_{d_2} e^{-(\lambda_{a_1}+\lambda_{a_2}+\mu_{d_2})x} \cdot e^{(\lambda_{a_1}+\lambda_{a_2})t} \right] dx$$

$$= \frac{\lambda_{a_1}}{\lambda_{a_1}+\lambda_{a_2}} \left[- e^{-\mu_{d_2} x} + \frac{\mu_{d_2}}{\lambda_{a_1}+\lambda_{a_2}+\mu_{d_2}} e^{-(\lambda_{a_1}+\lambda_{a_2}+\mu_{d_2})x} \cdot e^{(\lambda_{a_1}+\lambda_{a_2})t} \right]_t^{+\infty}$$

$$= \frac{\lambda_{a_1}}{\lambda_{a_1}+\lambda_{a_2}} \left[e^{-\mu_{d_2} \cdot t} - \frac{\mu_{d_2}}{\lambda_{a_1}+\lambda_{a_2}+\mu_{d_2}} e^{-(\lambda_{a_1}+\lambda_{a_2}+\mu_{d_2})t} \cdot e^{(\lambda_{a_1}+\lambda_{a_2})t} \right]$$

$$= \frac{\lambda_{a_1}}{\lambda_{a_1}+\lambda_{a_2}} \left(1 - \frac{\mu_{d_2}}{\lambda_{a_1}+\lambda_{a_2}+\mu_{d_2}} \right) e^{-\mu_{d_2} t}$$

$$= \frac{\lambda_{a_1}}{\lambda_{a_1}+\lambda_{a_2}} \frac{\lambda_{a_1}+\lambda_{a_2}}{\lambda_{a_1}+\lambda_{a_2}+\mu_{d_2}} e^{-\mu_{d_2} t} = \frac{\lambda_{a_1}}{\lambda_{a_1}+\lambda_{a_2}+\mu_{d_2}} e^{-\mu_{d_2} t}$$

$$\Rightarrow P(V_{d_2} - Y_{a_1} \geq t \mid Y_{a_2} \geq Y_{a_1}, V_{d_2} \geq Y_{a_1}) = \frac{\frac{\lambda_{a_1}}{\lambda_{a_1}+\lambda_{a_2}+\mu_{d_2}} e^{-\mu_{d_2} t}}{\frac{\lambda_{a_1}}{\lambda_{a_1}+\lambda_{a_2}+\mu_{d_2}}}$$

$$= e^{-\mu_{d_2} t} = P(V_{d_2} \geq t)$$

è un altro modo di vedere la proprietà di mancanza di memoria per V_{d_2}

Finora la conoscevamo nella forma $P(V_{d_2} \geq s+t \mid V_{d_2} \geq s) = P(V_{d_2} \geq t)$