II Prova in Itinere di Sistemi ad Eventi Discreti - 11.12.2007

Esercizio 1

Due giocatori A e B giocano nel modo seguente. Vengono effettuate estrazioni successive da un'urna che inizialmente contiene 2 palline rosse (R) e 2 palline nere (N). Se la pallina estratta è N, essa viene messa da parte, mentre se la pallina estratta è R, essa viene rimessa nell'urna insieme ad una nuova pallina N. Il giocatore A vince non appena nell'urna ci sono 4 palline N; il giocatore B vince non appena nell'urna non ci sono più palline N.

i) Mostrare che il gioco può essere modellizzato come una catena di Markov a tempo discreto, di cui si chiede di calcolare la matrice di transizione.

ii) Calcolare la densità di probabilità discreta del tempo di ricorrenza dello stato iniziale. Lo stato è ricorrente o transitorio?

Esercizio 2

Un'azienda manifatturiera impiega una macchina che lavora in continuo. La macchina si guasta mediamente dopo $t_g = 1000$ ore. Una riparazione necessita mediamente di $t_r = 50$ ore. Si suppone che le durate di vita degli eventi di guasto e riparazione seguano distribuzioni esponenziali.

i) Modellizzare il funzionamento della macchina come una catena di Markov a tempo continuo, di cui si chiede di calcolare la matrice dei tassi di transizione.

ii) Calcolare la probabilità che la macchina non si guasti nelle prime 500 ore di funzionamento.

iii) Per verificare l'operatività della macchina, la ditta produttrice invia un'ispezione dopo una settimana dall'installazione. Qual è la probabilità che l'ispezione trovi la macchina guasta?

iv) Supponendo che l'inattività della macchina costi 650 €/ora, verificare se, sul lungo periodo, all'azienda conviene passare a una macchina meno affidabile ($t'_g = 800$) ma più facile da riparare ($t'_r = 25$).

Esercizio 3

Un provider deve decidere la capacità di memoria del proprio server. La memoria ha un costo di 0.05 €/kB, ed il budget del provider è di 100.00 €. Noto che le richieste al server arrivano in pacchetti di 128 kB con frequenza media 1 arrivo/msec, e che il server processa ciascun pacchetto con durata media di servizio 0.65 msec, determinare la capacità di memoria che il server può acquistare in modo da minimizzare la probabilità a regime di rifiutare un pacchetto. Si ipotizzano tempi di interarrivo e di servizio di tipo Markoviano.

SOLUZIONI

Esercizio 1

i) Osserviamo che il numero di palline rosse nell'urna è sempre 2 a ogni estrazione, mentre il numero di palline nere può cambiare. Quindi prendiamo come stato X della catena il numero di palline nere nell'urna. Lo spazio di stato è $\mathcal{X} = \{0,1,2,3,4\}$.

Determiniamo le probabilità di transizione $p_{i,j} = P(X_{k+1} = j \mid X_k = i)$.

- Lo stato $X=0$ è lo stato in cui B vince, e il gioco termina. Assumiamo dunque $X=0$ come stato assorbente:

  $p_{0,0} = 1$ e $p_{0,i} = 0 \quad \forall i = 1,2,3,4$

- Nello stato $X=1$, ci sono 3 palline nell'urna, di cui 2 R e 1 N:

  $p_{1,0} = P(\text{estrarre N}) = \frac{1}{3}$

  $p_{1,2} = P(\text{estrarre R}) = \frac{2}{3}$

  $p_{1,i} = 0 \quad \forall i = 1,3,4$

- Nello stato $X=2$ ci sono 4 palline nell'urna, di cui 2R e 2N:

  $p_{2,1} = P(\text{estrarre N}) = \frac{1}{2}$

  $p_{2,3} = P(\text{estrarre R}) = \frac{1}{2}$

  $p_{2,i} = 0 \quad \forall i = 0,2,4$

- Nello stato $X=3$ ci sono 5 palline nell'urna, di cui 2R e 3N:

  $p_{3,2} = P(\text{estrarre N}) = \frac{3}{5}$

  $p_{3,4} = P(\text{estrarre R}) = \frac{2}{5}$

  $p_{3,i} = 0 \quad \forall i = 0,1,3$

- Lo stato $X=4$ è lo stato in cui A vince, e il gioco termina.

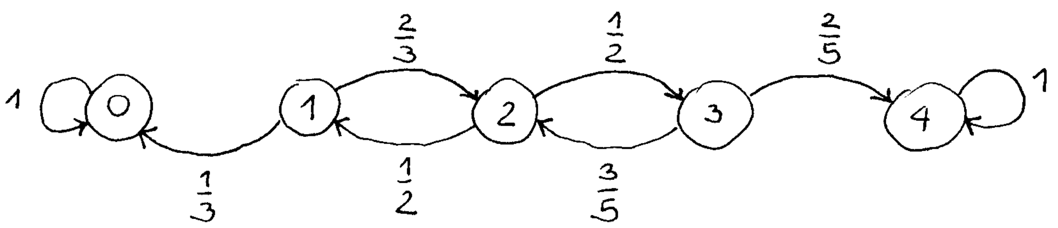
  Assumiamo dunque $X=4$ come stato assorbente:

  $$p_{4,4}=1 \quad e \quad p_{4,i}=0 \quad \forall i=0,1,2,3$$

La matrice di transizione risultante è:

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

corrispondente al diagramma di transizione:



ii) Lo stato iniziale è $X_0=2$.

Il tempo di ricorrenza $T_{2,2}$ è definito come il minimo intero positivo k tale che $X_k=2$, noto $X_0=2$. Dunque

$$T_{2,2}=k \iff X_0=2, X_1\neq 2, \dots, X_{k-1}\neq 2, X_k=2.$$

Osserviamo che:

- $P(T_{2,2}=2n+1)=0 \quad \forall n=0,1,2,\dots$

  Infatti, non è possibile ritornare nello stato 2 in un numero dispari di passi.

- $P(T_{2,2}=2) = P(E_1=N, E_2=R \mid X_0=2) + P(E_1=R, E_2=N \mid X_0=2)$

  $= P(E_2=R \mid X_1=1)P(E_1=N \mid X_0=2) + P(E_2=N \mid X_1=3)P(E_1=R \mid X_0=2)$

  $= p_{1,2}\cdot p_{2,1} + p_{3,2}\cdot p_{2,3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{19}{30}$

- $P(T_{2,2} = 2n) = 0 \quad \forall n = 2, 3, \dots$

Infatti, seppur sia possibile ritornare nello stato 2 in un numero pari di passi, necessariamente ciò comporta di visitare lo stato 2 ogni 2 passi, e quindi $X_k = 2$ per qualche $0 < k < 2n$, se $n = 2, 3, \dots$

Dunque:

$$\rho_2^{(k)} = P(T_{2,2} = k) = \begin{cases} \frac{19}{30} & \text{se } k = 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dato che $\rho_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_2^{(k)} = \rho_2^{(2)} = \frac{19}{30} < 1$, lo stato 2 è <u>transitorio</u>

<u>Esercizio 2</u>

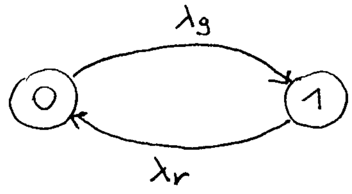
$$\lambda_g = \frac{1}{t_g} = 0.001 , \qquad \lambda_r = \frac{1}{t_r} = 0.02$$

i) Il funzionamento della macchina può essere modellizzato come una catena di Markov a tempo continuo con due stati:

$X = 0$: la macchina è in funzione

$X = 1$: la macchina è guasta.

Il <u>grafo dei tassi di transizione</u> è



corrispondente alla <u>matrice dei tassi di transizione</u>:

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_g & \lambda_g \\ \lambda_r & -\lambda_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.001 & 0.001 \\ 0.02 & -0.02 \end{bmatrix}$$

ii) Definendo con $V(0)$ il tempo di soggiorno nello stato 0, la probabilità richiesta è $P(V(0)>500)$. Ricordando che $V(0)$ segue una distribuzione esponenziale con parametro λ_g, abbiamo:

$$P(V(0)>500) = e^{-\lambda_g \cdot 500} = e^{-0.5} \simeq 0.6065$$

iii) Una settimana corrisponde a $7 \cdot 24 = 168$ ore. Ricordando la notazione

$$\pi_i(t) = P(X(t)=i), \quad i=0,1 \qquad \Rightarrow \qquad \pi(t) = [\pi_0(t) \;\; \pi_1(t)],$$

la probabilità richiesta è il valore $\pi_1(168)$. Per calcolarla, ricordiamo ancora che

$$\pi(t) = \pi(0)\, e^{Qt} \qquad \text{con} \quad \pi(0) = [1 \quad 0].$$

all'istante iniziale la macchina è in funzione.

Dobbiamo dunque calcolare e^{Qt}.

Due modi:

1) $e^{Qt} = T e^{\tilde{Q}t} T^{-1}$, con $\tilde{Q} = T^{-1} Q T$ matrice di cui si conosce la forma esponenziale (per esempio, $\tilde{Q}$ in forma diagonale, se Q è diagonalizzabile).

2) trasformata di Laplace: $\mathcal{L}[e^{Qt}] = (sI-Q)^{-1}$

Applichiamo per esempio il secondo metodo:

$$sI - Q = \begin{bmatrix} s+\lambda_g & -\lambda_g \\ -\lambda_r & s+\lambda_r \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (sI-Q)^{-1} = \frac{1}{(s+\lambda_g)(s+\lambda_r) - \lambda_g\lambda_r} \begin{bmatrix} s+\lambda_r & \lambda_g \\ \lambda_r & s+\lambda_g \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s(s+\lambda_g+\lambda_r)} \begin{bmatrix} s+\lambda_r & \lambda_g \\ \lambda_r & s+\lambda_g \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \Pi(s) = \Pi(0)\,(sI-Q)^{-1} = \left[\frac{s+\lambda_r}{s(s+\lambda_g+\lambda_r)} \quad \underbrace{\frac{\lambda_g}{s(s+\lambda_g+\lambda_r)}}_{\Pi_1(s)} \right]$$

Scomponendo $\Pi_1(s)$ in fratti semplici, otteniamo:

$$\Pi_1(s) = \frac{\lambda_g}{\lambda_g+\lambda_r}\cdot\frac{1}{s} - \frac{\lambda_g}{\lambda_g+\lambda_r}\cdot\frac{1}{s+\lambda_g+\lambda_r}$$

$$= \frac{\lambda_g}{\lambda_g+\lambda_r}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\lambda_g+\lambda_r}\right)$$

e antitrasformando:

$$\Pi_1(t) = \frac{\lambda_g}{\lambda_g+\lambda_r}\left[1 - e^{-(\lambda_g+\lambda_r)t}\right], \quad t \geq 0.$$

Valutando l'espressione di $\Pi_1(t)$ in $t = 168$, otteniamo:

$$\Pi_1(168) = \frac{0.001}{0.001+0.02}\left[1 - e^{-(0.001+0.02)\cdot 168}\right] \simeq 0.0462$$

iv) Lungo periodo $\Rightarrow$ situazione di regime.

La frazione di tempo in cui mediamente la macchina è inattiva è data dalla probabilità stazionaria

$$\Pi_1 = \lim_{t\to+\infty} \Pi_1(t) = \frac{\lambda_g}{\lambda_g+\lambda_r} = \frac{0.001}{0.001+0.02} \simeq 0.0476$$

$\Downarrow$

costo medio: $\simeq 31$ €/ora

Nel caso della seconda macchina, con

$$\lambda_g' = \frac{1}{t_g'} = 0.00125 \quad \text{e} \quad \lambda_r' = \frac{1}{t_r'} = 0.04,$$

abbiamo:

$$\Pi_1' = \frac{\lambda_g'}{\lambda_g'+\lambda_r'} = \frac{0.00125}{0.00125+0.04} \simeq 0.0303$$

$\Downarrow$

costo medio: $\simeq 20$ €/ora

Essendo il costo medio inferiore per la seconda macchina, all'azienda conviene passare a quest'ultima.

Esercizio 3

Modellizziamo il sistema come una coda M/M/1|K in cui K (capacità della coda) è da determinare.

Ogni posto nella coda deve ospitare un pacchetto di 128 kB, quindi il costo di un posto è $0.05 \cdot 128 = 6.4$ €/posto.

La probabilità di blocco è data dalla formula

$$P_B = \frac{(1-\rho)\,\rho^K}{1-\rho^{K+1}}$$

dove, essendo $\lambda = 1$ arrivo/msec e $\mu = \frac{1}{0.65}$ servizi/msec, risulta che $\rho = 0.65$.

Il problema di ottimizzazione da risolvere è

$$\begin{cases} \min\limits_{K} \; P_B \\ \quad \text{s.t.} \\ \qquad 6.4 \cdot K \leq 100 \end{cases}$$

Dato che P_B è una funzione decrescente di K, l'ottimo si ottiene per il valore massimo di K compatibile con il vincolo di costo:

$$6.4\,K \leq 100 \iff K \leq 15.625$$

Dunque il valore ottimo per K è $K = 15$, corrispondente a 1920 kB di memoria.