I Prova in Itinere di Sistemi ad Eventi Discreti - 19.11.2007
Primo turno

Esercizio 1

Costruire un automa a stati finiti con numero di stati minimo che riconosca il linguaggio definito dall'espressione regolare $(a^* + bc^*)^* + bc^*a$.

Esercizio 2

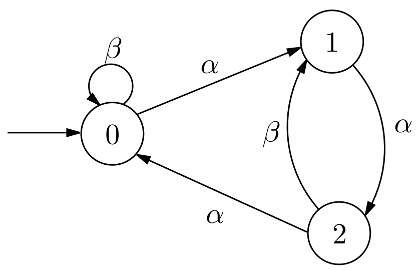
Il processore di un PC è preceduto da una coda che può contenere un solo processo oltre a quello in esecuzione. I processi possono essere di due tipi, con il tipo 1 che ha priorità più alta del tipo 2. Questo significa che, se arriva un processo di tipo 1 e trova un processo di tipo 2 in esecuzione, il processo di tipo 2 viene rimesso in coda, e il processo di tipo 1 viene messo in esecuzione (*preemption*). Se un qualsiasi processo arriva e trova il sistema pieno, esso viene respinto e perso.

i) Definire un automa a stati che modellizzi il funzionamento logico del sistema. Si supponga che il sistema sia inizialmente vuoto.

ii) Definire una opportuna struttura di temporizzazione in modo tale che avvenga un servizio completo, e poi una *preemption* nel sistema.

Esercizio 3

Si consideri l'automa a stati in figura:



e la struttura di temporizzazione stocastica $F = \{F_\alpha, F_\beta\}$, dove F_α e F_β sono le distribuzioni di probabilità delle durate di vita degli eventi α e β, rispettivamente.

Supposto che F_α e F_β sono distribuzioni esponenziali con valore atteso $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$, rispettivamente, si risponda ai seguenti quesiti:

i) Calcolare la probabilità di avere esattamente $n = 2$ eventi α nell'intervallo $[0, 10]$ secondi.

ii) Noto che, in un certo istante, lo stato è $x = 1$, calcolare la probabilità di ritornare nello stesso stato nel minor numero di transizioni possibili.

iii) Calcolare la probabilità che il sistema rimanga nello stato iniziale per almeno 8 secondi, noto che vi ha già trascorso 5 secondi.

Supposto poi che F_α e F_β sono distribuzioni uniformi negli intervalli $[0, 10]$ e $[0, 5]$ secondi, rispettivamente:

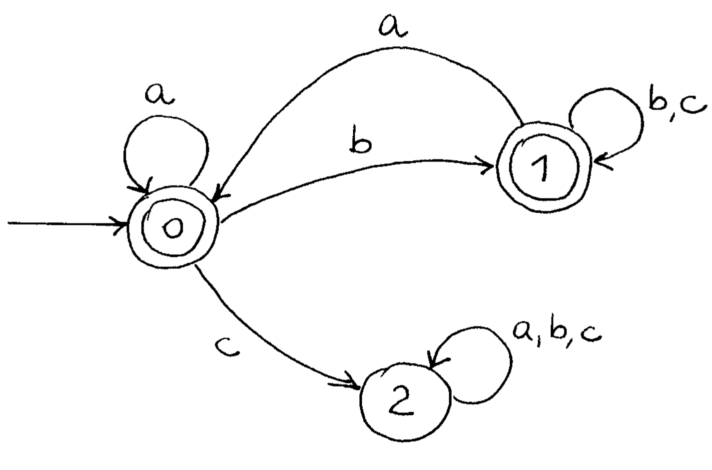
iv) Rispondere alla stessa domanda del quesito *iii*), commentando le differenze rispetto alla risposta a tale quesito.

esercizio 1

Innanzi tutto conviene osservare che il linguaggio descritto dall'espressione regolare bc^*a è contenuto nel linguaggio descritto dall'espressione regolare $(a^*+bc^*)^*$.

Inoltre, l'espressione regolare $(a^*+bc^*)^*$ è equivalente all'espressione regolare $(a+bc^*)^*$.

Quindi l'esercizio si riduce a costruire un automa a stati finiti con numero minimo di stati che riconosca il linguaggio descritto dalla sola espressione regolare $(a+bc^*)^*$. Conviene osservare che, in questo linguaggio, sono escluse tutte e sole le stringhe che cominciano con "c", oppure in cui una "c" è preceduta da una "a". L'automa cercato è dunque il seguente:



Gli stati 0 e 1 sono stati finali, mentre lo stato 2 raccoglie tutte le stringhe che non appartengono al linguaggio.

esercizio 2

i) Definiamo lo stato del sistema come $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, dove x_1 rappresenta il tipo del processo in esecuzione, mentre x_2 rappresenta il tipo del processo in coda. Si usa il valore 0 per indicare nessun processo.

Dunque: $x_1, x_2 \in \{0,1,2\}$, e l'insieme degli stati possibili è

$$\mathcal{X} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

In particolare, lo stato $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ non è possibile a causa del meccanismo di preemption.

L'insieme degli eventi è $\mathcal{E} = \{a_1, a_2, d_1, d_2\}$, dove:

- a_i : arrivo di un processo di tipo i, $i = 1,2$
- d_i : partenza di un processo di tipo i, $i = 1,2$

<u>OSSERVAZIONE</u>: Un'altra possibile scelta per lo stato del sistema poteva essere:

$$x = \begin{bmatrix} n \\ \hdashline c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

, dove n è il numero di processi nel sistema, e c_i è il tipo del processo i-esimo. Il corrispondente insieme degli stati possibili è:

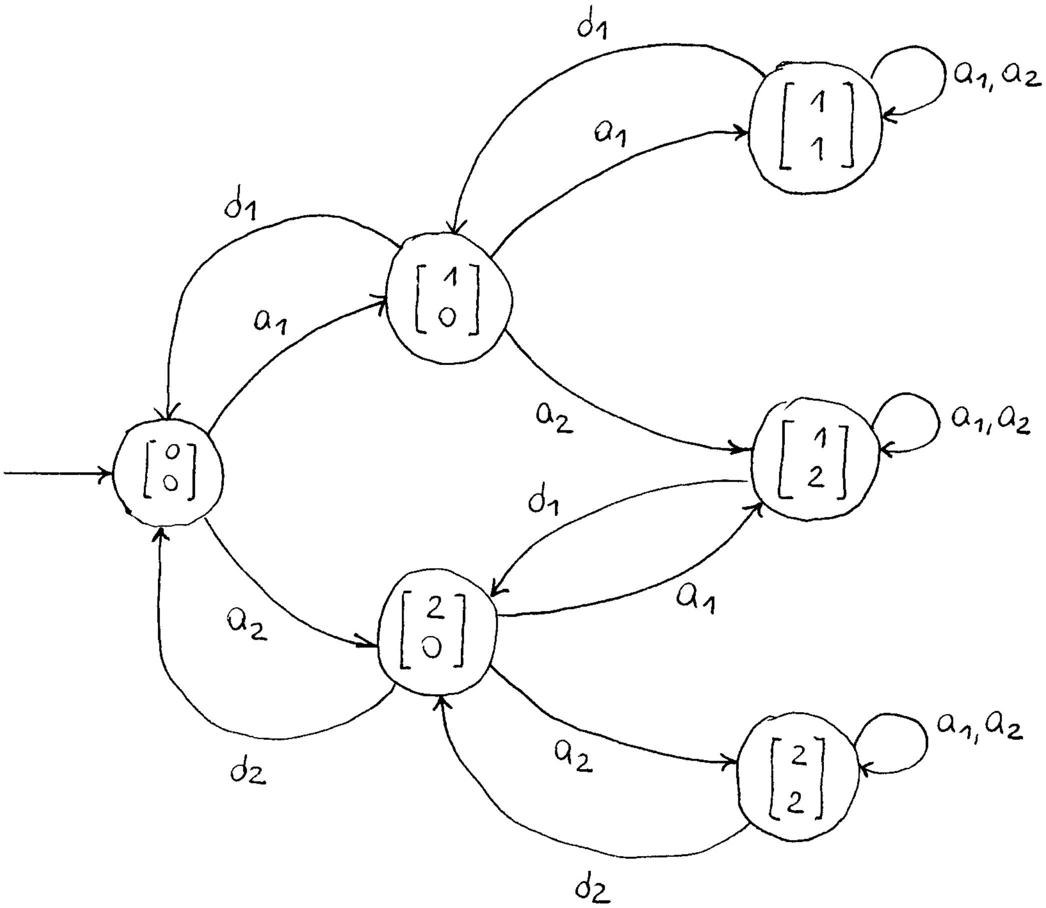
$$\mathcal{X} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \hdashline [\,] \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \hdashline 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \hdashline 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ \hdashline 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ \hdashline 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ \hdashline 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Tuttavia, nel caso di coda con capacità <u>finita</u> (come è il caso dell'esercizio), la prima definizione è consigliabile.

Il funzionamento logico del sistema è modellizzato dall'automa a stati illustrato a pagina seguente. Si osservi che:

- si verifica preemption quando lo stato corrente è $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, e il prossimo evento è a_1;
- gli eventi a_1 e a_2 sono <u>sempre possibili</u>, e se il sistema è pieno (stati $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$) essi non determinano un cambio di stato.

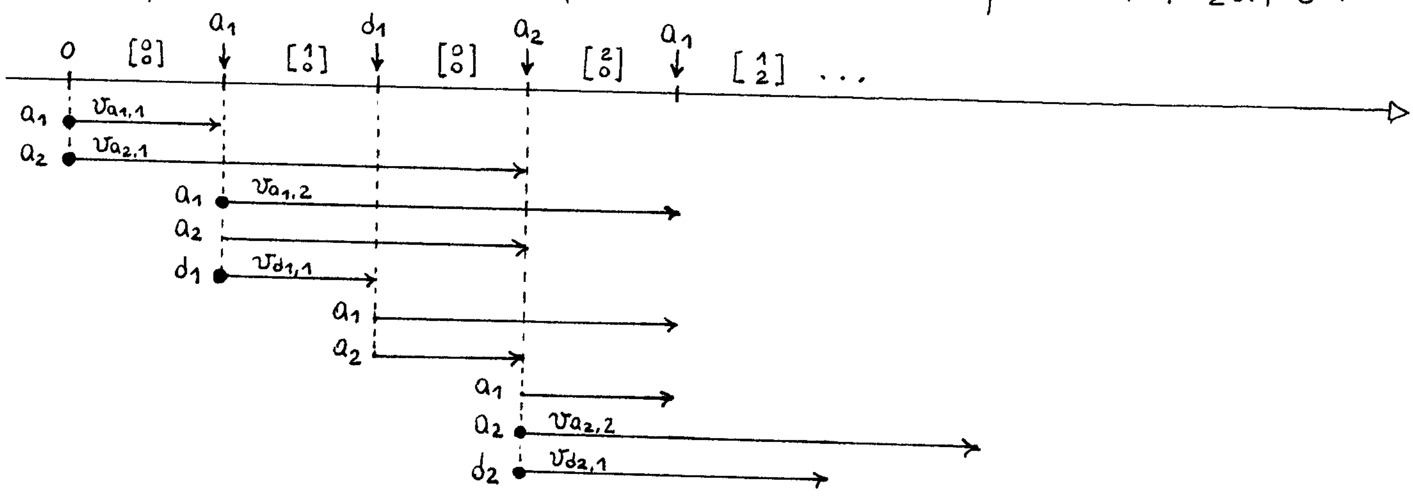
<u>Non è corretto</u> disattivare gli eventi di arrivo quando il sistema è pieno.



ii) Un servizio completo e poi una preemption sono *per esempio* realizzati dalla sequenza di eventi:

$$\underbrace{a_1 d_1}_{\text{servizio completo}} \underbrace{a_2 a_1}_{\text{preemption}} \qquad (\text{altra possibilità: } a_2 d_2 a_2 a_1, \text{ ecc.})$$

Un possibile diagramma temporale che realizza la sequenza $a_1 d_1 a_2 a_1$ è:



con struttura di temporizzazione:

$$V_{a_1} = \{ \underset{v_{a_1,1}}{1}, \underset{v_{a_1,2}}{3}, \dots \}$$

$$V_{a_2} = \{ \underset{v_{a_2,1}}{3}, \underset{v_{a_2,2}}{3}, \dots \}$$

$$V_{d_1} = \{ \underset{v_{d_1,1}}{1}, \dots \}$$

$$V_{d_2} = \{ \underset{v_{d_2,1}}{2}, \dots \}$$

esercizio 3

F_α distribuzione esponenziale con valore atteso $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\lambda_\alpha = 2$

F_β distribuzione esponenziale con valore atteso $\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ $\lambda_\beta = \frac{2}{3}$

i) L'evento α è sempre possibile, e le sue durate di vita seguono una distribuzione esponenziale. Quindi, il conteggio delle occorrenze dell'evento α è un processo di Poisson. Applicando la formula

$$P(N_\alpha(t) = n) = \frac{(\lambda_\alpha t)^n}{n!} e^{-\lambda_\alpha t}$$ (probabilità di n occorrenze nell'intervallo $[0,t]$)

con $n = 2$ e $t = 10$, otteniamo:

$$P(N_\alpha(10) = 2) = \frac{(2 \cdot 10)^2}{2} e^{-2 \cdot 10} = 200\, e^{-20} \simeq 4.12 \cdot 10^{-7}$$

ii) Dal grafo di transizione dello stato osserviamo che il numero minimo di transizioni necessarie per ritornare nello stato 1 è 2, e corrisponde alla sequenza di eventi $\alpha\beta$.

$$\Rightarrow P(E_{k+2}=\beta \; E_{k+1}=\alpha \mid X_k=1) =$$

$$= P(E_{k+2}=\beta \mid X_k=1, E_{k+1}=\alpha)\, P(E_{k+1}=\alpha \mid X_k=1)$$

$$= \underbrace{P(E_{k+2}=\beta \mid X_{k+1}=2)}_{\frac{\lambda_\beta}{\lambda_\alpha+\lambda_\beta}} \underbrace{P(E_{k+1}=\alpha \mid X_k=1)}_{1} = \frac{\lambda_\beta}{\lambda_\alpha+\lambda_\beta} = 0.25$$

iii) Dal grafo di transizione dello stato osserviamo che il sistema abbandona lo stato iniziale <u>solo</u> al verificarsi di un evento α. Infatti, il verificarsi di un evento β non determina un cambio di stato, se lo stato corrente è lo stato iniziale. Dunque la probabilità cercata è

$$P(V_\alpha > 8 \mid V_\alpha > 5)$$

dove V_α è la durata di vita dell'evento α. Dato che V_α segue la distribuzione esponenziale F_α, essa gode della <u>proprietà di mancanza di memoria</u>. Quindi:

$$P(V_\alpha > 8 \mid V_\alpha > 5) = P(V_\alpha > 3) = e^{-\lambda_\alpha \cdot 3} = e^{-6} \simeq 2.48 \cdot 10^{-3}.$$

iv) L'approccio alla domanda è lo stesso del punto iii). Si deve calcolare

$$P(V_\alpha > 8 \mid V_\alpha > 5)$$

ma in questo caso V_α segue la distribuzione uniforme:

<u>NON VALE</u> la proprietà di mancanza di memoria!

$$F_\alpha(t) = P(V_\alpha \le t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t<0 \\ \frac{1}{10}t & \text{se } 0 \le t \le 10 \\ 1 & \text{se } t>10 \end{cases}$$

Dunque:

$$P(V_\alpha > 8 \mid V_\alpha > 5) = \frac{P(V_\alpha > 8)}{P(V_\alpha > 5)} = \frac{1 - F_\alpha(8)}{1 - F_\alpha(5)} = \frac{1 - \frac{8}{10}}{1 - \frac{5}{10}} = \frac{2}{5} = 0.4$$

<u>ATTENZIONE</u>: l'intersezione degli eventi $\{V_\alpha > 5\}$ e $\{V_\alpha > 8\}$ è $\{V_\alpha > 8\}$!

I Prova in Itinere di Sistemi ad Eventi Discreti - 19.11.2007
Secondo turno

Esercizio 1

Costruire un automa a stati finiti con numero di stati minimo che riconosca il linguaggio definito dall'espressione regolare $(ca^* + b^*)^* + cb^*$.

Esercizio 2

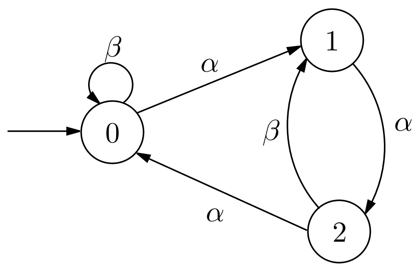
Il processore di un PC è preceduto da una coda che può contenere un solo processo oltre a quello in esecuzione. I processi possono essere di due tipi, con il tipo 2 che ha priorità più alta del tipo 1. Questo significa che, se un processo di tipo 2 viene accodato e trova un processo di tipo 1 in esecuzione, il processo di tipo 1 viene rimesso in coda, e il processo di tipo 2 viene messo in esecuzione (*preemption*). Se un qualsiasi processo arriva e trova il sistema pieno, esso viene respinto e perso, a meno che entrambi i processi nel sistema siano di tipo 1 ed arriva un processo di tipo 2. In tal caso, il processo di tipo 1 in attesa viene rimosso per far posto al processo di tipo 2, ma non avviene *preemption*.

i) Definire un automa a stati che modellizzi il funzionamento logico del sistema. Si supponga che il sistema sia inizialmente vuoto.

ii) Definire una opportuna struttura di temporizzazione in modo tale che avvenga un servizio completo, e poi una *preemption* nel sistema.

Esercizio 3

Si consideri l'automa a stati in figura:



e la struttura di temporizzazione stocastica $F = \{F_\alpha, F_\beta\}$, dove F_α e F_β sono le distribuzioni di probabilità delle durate di vita degli eventi α e β, rispettivamente.

Supposto che F_α e F_β sono distribuzioni esponenziali con valore atteso $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$, rispettivamente, si risponda ai seguenti quesiti:

i) Calcolare la probabilità di avere almeno $n = 2$ eventi α nell'intervallo $[0, 10]$ secondi.

ii) Calcolare la probabilità di visitare tutti gli stati nel minor numero di transizioni possibili.

iii) Calcolare la probabilità che il sistema rimanga nello stato iniziale per almeno 5 secondi.

iv) Determinare la distribuzione di probabilità della durata dell'attesa del primo evento.

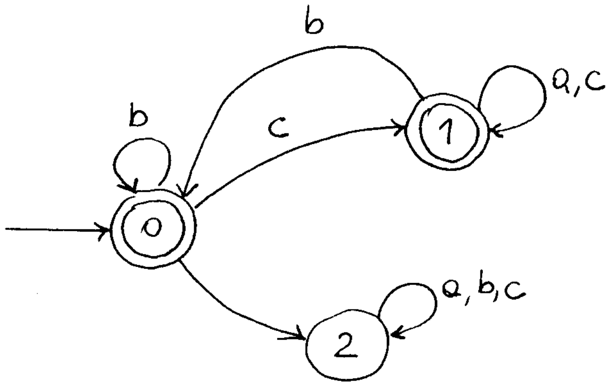
Supposto poi che F_α e F_β sono distribuzioni uniformi negli intervalli $[0, 5]$ e $[0, 10]$ secondi, rispettivamente, si risponda al seguente quesito:

v) Determinare la distribuzione di probabilità della durata dell'attesa del primo evento. Commentare le differenze rispetto alla risposta al quesito *iv*).

SOLUZIONI

esercizio 1

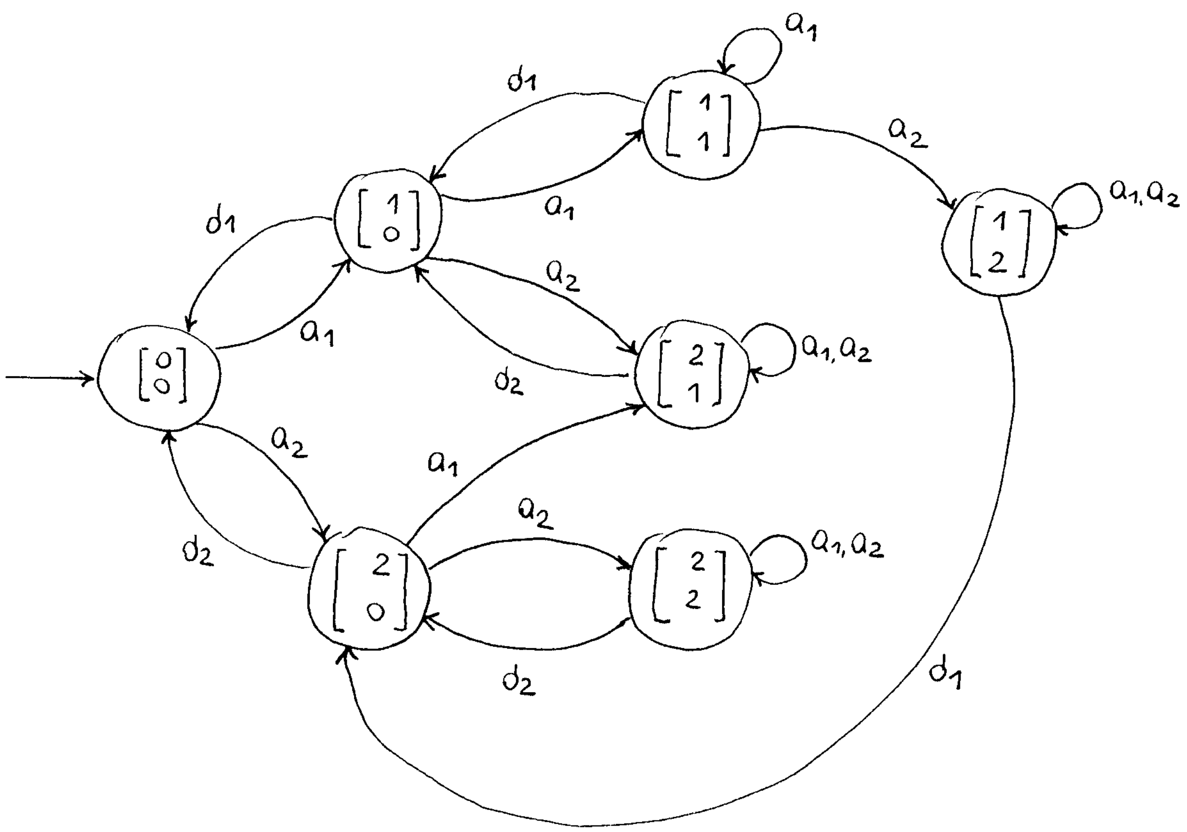
Si veda la soluzione dell'esercizio 1 per il <u>primo turno</u>.



esercizio 2

i) Stessa definizione del vettore di stato e dell'insieme degli eventi data nella soluzione dell'esercizio 2 per il <u>primo turno</u>.

<u>diagramma di transizione dello stato</u>



Si osservi che:

- si verifica preemption quando lo stato corrente è $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, e il prossimo evento è a_2;
- se il sistema è pieno (stati $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$), gli eventi a_1 e a_2 non determinano un cambio di stato, a meno che lo stato corrente sia $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, e il prossimo evento sia a_2: in tal caso, si ha transizione nello stato $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$.

ii) Un servizio completo e poi una preemption sono per esempio realizzate dalle sequenze di eventi $a_1 d_1 a_1 a_2$, oppure $a_2 d_2 a_1 a_2$.

Si veda la soluzione dell'esercizio 2 per il primo turno.

esercizio 3

i) Come nella soluzione dell'esercizio 3 per il primo turno, osserviamo che il conteggio delle occorrenze dell'evento α è un processo di Poisson con $\lambda_\alpha = 2$. Dunque la probabilità cercata è

$$\sum_{n=2}^{\infty} P(N_\alpha(t)=n) = 1 - P(N_\alpha(t)=0) - P(N_\alpha(t)=1)$$

dove $t=10$. Quindi:

$$\sum_{n=2}^{\infty} P(N_\alpha(t)=n) = 1 - e^{-\lambda_\alpha t} - (\lambda_\alpha t)e^{-\lambda_\alpha t} = 1 - e^{-2\cdot 10} - (2\cdot 10)e^{-2\cdot 10} =$$

$$= 1 - 21e^{-20} \simeq 1$$

ii) Partendo dallo stato iniziale, la probabilità richiesta coincide con la probabilità

$$P(E_2=\alpha, E_1=\alpha \mid X_0=0) =$$

$$= P(E_2=\alpha \mid X_0=0, E_1=\alpha)\, P(E_1=\alpha \mid X_0=0)$$

$$= P(E_2=\alpha \mid X_1=1)\, P(E_1=\alpha \mid X_0=0) = 1 \cdot \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\alpha+\lambda_\beta} = \frac{3}{4} = 0.75$$

iii) In maniera simile alla soluzione dell'esercizio 3 per il <u>primo turno</u>, la probabilità richiesta è

$$P(V_\alpha > 5) = 1 - F_\alpha(5) = e^{-\lambda_\alpha \cdot 5} = e^{-10} \simeq 4.54 \cdot 10^{-5}$$

iv) La distribuzione di probabilità richiesta è data da

$$P(Y_0^* \leq t) = 1 - e^{-\Lambda(0)t}, \quad t \geq 0$$

dove $\Lambda(0) = \lambda_\alpha + \lambda_\beta = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$. Dunque:

$$P(Y_0^* \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 - e^{-\frac{8}{3}t} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

gli eventi sono indipendenti

$$v)\ P(Y_0^* \leq t) = 1 - P(Y_0^* > t) = 1 - P(V_\alpha > t, V_\beta > t) =$$

$$= 1 - P(V_\alpha > t)\,P(V_\beta > t) = 1 - (1 - F_\alpha(t))(1 - F_\beta(t)),$$

dove:

$$F_\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \frac{1}{5}t & \text{se } 0 \leq t \leq 5 \\ 1 & \text{se } t > 5 \end{cases} \qquad F_\beta(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \frac{1}{10}t & \text{se } 0 \leq t \leq 10 \\ 1 & \text{se } t > 10 \end{cases}$$

Dunque:

$$P(Y_0^* \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \frac{3}{10}t - \frac{1}{50}t^2 & \text{se } 0 \leq t \leq 5 \\ 1 & \text{se } t > 5 \end{cases}$$