www.dii.unisi.it\~paoletti

↳ Didattica

⇝ disponibile collezione di esercizi

Lezione 27/05/2005

ESERCIZIO

Si consideri la successione:

$$p(k) = \begin{cases} e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!} & \text{se } k=0,1,2,\dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\lambda > 0$ è un parametro

1) verificare che $p(k)$ definisce una densità di probabilità discreta.

1. $p(k) \in [0,1]$?
2. $\sum_{k=0}^{\infty} p(k) = 1$?

proprietà di una densità di probabilità discreta

NOTA – $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$

Somma di termini positivi

singolo termine della somma

$$\Rightarrow 1 = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}{e^{\lambda}} \geq \frac{\frac{\lambda^k}{k!}}{e^{\lambda}} \Rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \leq 1$$

$\Rightarrow$ quindi $p(k) \in [0,1]$ per ogni k

- $\sum_{k=0}^{\infty} p(k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$

2) calcolare il valore atteso di una variabile aleatoria X che segue la densità di probabilità $p(k)$, cioè:

$$P\{X=k\} = p(k) \quad \text{per ogni } k=0,1,2,\dots$$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} k \frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$k! = k(k-1)!$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} =$$

$$= e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}}_{= e^{\lambda}} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

$$i = k-1$$

$$\Rightarrow \boxed{E[X] = \lambda}$$

3) Calcolare la varianza della v.a. X

$$Var(X) = E\left[(X - E[X])^2\right] = E\left[(X-\lambda)^2\right] =$$

si ricordi che $E[X] = \lambda$

$$= E[X^2] - \lambda^2$$

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} k$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$i = k-1$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \frac{\lambda^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{\lambda^i}{i!} + \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}}_{e^{\lambda}}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda \cdot \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda e^{\lambda}$$

$$E[X^2] = \lambda \cdot e^{-\lambda} \left(\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}\right) = \lambda^2 + \lambda$$

$$Var(X) = E[X^2] - \lambda^2 = \cancel{\lambda^2} + \lambda - \cancel{\lambda^2} = \lambda$$

$$\Rightarrow \boxed{Var(X) = \lambda}$$

$$p(k) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \lambda > 0$$

si chiama <u>DENSITÀ DI PROBABILITÀ DI POISSON</u>,

ed è tale che il valore atteso e la varianza di una v.a. che segue tale densità coincidono con il parametro λ.

---

densità di probabilità $B(n,p)$ [<u>binomiale</u>]

↳ modellizza il numero di successi in **n** prove indipendenti in cui la probabilità di successo è **p**.

$$p(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & k = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$P\{\text{ottengo } k \text{ successi nelle } n \text{ prove}\} = p(k)$$

Una <u>densità di probabilità di Poisson</u> con parametro $\lambda = np$ può essere utilizzata per approssimare una densità di probabilità $B(n,p)$ con <u>n grande</u> e <u>p piccolo</u>.

Infatti...

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$ dove abbiamo utilizzato i limiti:

- $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = 1$ polinomio di grado k
- $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1$

Esercizio 1

Un dado viene lanciato n volte. Qual è la probabilità di ottenere "6" almeno una volta? Quante volte deve essere lanciato il dado affinché la probabilità di ottenere "6" almeno una volta sia maggiore o uguale al 90%?

Definiamo le variabili aleatorie ($i=1,2,\dots,n$):

X_i = risultato del lancio i-esimo $\Rightarrow X_i \in \{1,2,3,4,5,6\}$

Ci interessa l'evento $A = \{$ottengo "6" almeno una volta in n lanci$\}$

Passiamo al complementare: $A^c = \{$non ottengo mai "6" in n lanci$\}$

$$P\{A\} = 1 - P\{A^c\} = 1 - P\{X_1 \neq 6, X_2 \neq 6, \dots, X_n \neq 6\}$$

$$\underset{\text{indipendenza}}{=} 1 - P\{X_1 \neq 6\} P\{X_2 \neq 6\} \dots P\{X_n \neq 6\} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$\underline{n=1}$ - $P\{A\} = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \simeq 0.167$

$\underline{n=3}$ - $P\{A\} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 \simeq 0.421$

$$\lim_{n\to\infty} P\{A\} = \lim_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right] = 1$$

probabilità maggiore o uguale al 90%

- $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0.9 \qquad \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0.1$

$$n \cdot \log\left(\frac{5}{6}\right) \leq \log 0.1 \implies n \geq \frac{\log 0.1}{\log\left(\frac{5}{6}\right)} \simeq 12.630$$

si inverte il verso della disuguaglianza perchè $\log\left(\frac{5}{6}\right) < 0$!

$\Rightarrow$ il minimo numero di lanci necessario affinchè la probabilità di ottenere "6" almeno una volta sia maggiore del 90%, è $\underline{\underline{n=13}}$.

Esercizio 3

Le chiavi di un mazzo che ne contiene n vengono provate una dopo l'altra fino a trovare quella giusta. Le chiavi già provate vengono messe da parte... Qual è la probabilità che la chiave giusta venga trovata al k-esimo tentativo?

Definiamo le V.a.: $X_i = \begin{cases} 0 & \text{se la } i\text{-esima chiave scelta (non) è quella giusta} \\ 1 & \text{" " " " è quella giusta} \end{cases} \quad i=1,\dots,n$

$X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_n$

$\square \quad \square \quad \dots \quad \square$ $\Rightarrow$ queste caselle le possiamo riempire con $n-1$ "0" e un solo "1"

$\Rightarrow$ abbiamo n sequenze possibili

$$P\{X_k=1\} = P\{X_1=0,\dots,X_{k-1}=0, X_k=1, X_{k+1}=0,\dots,X_n=0\}$$

$(k=1,\dots,n)$

$$= \frac{\#\text{casi favorevoli}}{\#\text{casi possibili}} = \frac{1}{n}$$ indipendente da k!

Esercizio 12

Due monete vengono lanciate più volte fino a che entrambe abbiano ottenuto almeno una volta testa. Qual è la probabilità che occorrano k lanci?

X = istante di primo successo nel lancio della 1ª moneta

(successo $\Leftrightarrow$ lancio della moneta ha dato testa)

$\hookrightarrow$ in un singolo lancio la probabilità di successo è $a = \frac{1}{2}$

Y = istante di primo successo nel lancio della 2ª moneta

$\hookrightarrow$ in un singolo lancio la probabilità di successo è $b = \frac{1}{2}$

$P\{X=k\} = a(1-a)^{k-1}$ $\Rightarrow$ densità geometrica

$P\{Y=k\} = b(1-b)^{k-1}$ $\Rightarrow$ densità geometrica

$k = 1, 2, 3, \dots$

$\Rightarrow$ la probabilità che ci interessa è $P\{\max(X,Y)=k\}$

$$P\{\max(X,Y)=k\} = P\{(X=k, Y\le k) \cup (X<k, Y=k)\}$$

$$= \underbrace{P\{X=k, Y\leq k\} + P\{X<k, Y=k\}}$$

eventi disgiunti

$$= P\{X=k\}P\{Y\leq k\} + P\{X<k\}P\{Y=k\}$$

eventi indipendenti

- $P\{X<k\} = 1 - \underbrace{P\{X\geq k\}}_{\text{probabilità di aver avuto insuccesso nei primi } k-1 \text{ lanci}} = 1-(1-a)^{k-1}$

$$P\{X\geq k\} = P\{(\text{insuccesso al } 1^\circ \text{ lancio}) \cap (\text{insuccesso al } 2^\circ \text{ lancio}) \cap \dots$$
$$\dots \cap (\text{insuccesso al } (k-1)^\circ \text{ lancio}\})$$

$$= P\{\text{insuccesso al } 1^\circ \text{ lancio}\} \cdot \ldots \cdot P\{\text{insuccesso al } (k-1)^\circ \text{ lancio}\}$$

Indipendenza

$$= \underbrace{(1-a)\cdot \ldots (1-a)}_{k-1 \text{ volte}} = (1-a)^{k-1}$$

- $P\{Y\leq k\} = 1 - \underbrace{P\{Y>k\}}_{\text{probabilità di aver avuto insuccesso nei primi } k \text{ lanci}} = 1-(1-b)^{k}$

- $P\{\max(X,Y)=k\} = P\{X=k\}P\{Y\leq k\} + P\{X<k\}P\{Y=k\}$

$$= a(1-a)^{k-1}\left[1-(1-b)^k\right] + \left[1-(1-a)^{k-1}\right]b(1-b)^{k-1}$$

OSSERVAZIONE - Abbiamo calcolato la densità di probabilità discreta della variabile aleatoria

$$Z = \max(X, Y).$$

Infatti, abbiamo calcolato i valori:

$$p(k) = P\{Z = k\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

↘ Calcoliamo il valore atteso di Z

[NOTA

Se $|x| < 1$, allora $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, $\sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$]

$$E[Z] = \sum_{k=1}^{\infty} k\, p(k)$$

$$p(k) = a(1-a)^{k-1} + b(1-b)^{k-1} - (a+b-ab)(1-a)^{k-1}(1-b)^{k-1}$$

$$E[Z] = a \sum_{k=1}^{\infty} k(1-a)^{k-1} + b \sum_{k=1}^{\infty} k(1-b)^{k-1} - (a+b-ab) \sum_{k=1}^{\infty} [(1-a)(1-b)]^{k-1}$$

Sono tutte serie del tipo $\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{x^k}{x} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} k x^k$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$E[Z] = a \cdot \frac{1}{(1-(1-a))^2} + b \cdot \frac{1}{(1-(1-b))^2} - (a+b-ab) \frac{1}{(1-(1-a)(1-b))^2} =$$

$$= a \cdot \frac{1}{a^2} + b \cdot \frac{1}{b^2} - (a+b-ab) \frac{1}{(a+b-ab)^2}$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b-ab} = 2.667 \quad (\text{sostituendo } a = b = \tfrac{1}{2})$$