19/05/05 | STATISTICA

VARIABILE ALEATORIA

Esempio: Ditta produce bulloni

probabilità che un bullone riesca non difettoso sia 80%, $p = 0,8$

$1-p = 0,2$ probab. che il bullone sia difettoso

Ogni bullone prodotto in modo INDIPENDENTE DAGLI altri.

Bulloni sono venduti in confezioni di 4

Pb: Qual è la probabilità che in una confezione al max 1 bullone sia difettoso?

$$\Omega = \{ \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) : \omega_i = 0,1 \}$$

$\omega_i = 0$ se l'i-esimo bullone è difettoso

$\omega_i = 1$ " " " non è difettoso

$$X(\omega) = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = \# \text{ bulloni corretti}$$

$$P\{\omega\} = p^k (1-p)^{4-k} \quad k = n° \text{ bulloni buoni in } \omega$$

ω ha al max 1 bullone difettoso se il n° di bulloni corretti è almeno 3, cioè se $\underline{X(\omega) \geq 3}$

$$\{\omega \in \Omega : \text{al max 1 bullone difettoso}\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq 3\}$$

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

In realtà X può assumere solo i valori in

$\{0, 1, 2, 3, 4\}$

Quindi:

$$\mathbb{P}\{\omega : X(\omega) \geq 3\} = \mathbb{P}\left(\{\omega : X(\omega) = 3\} \cup \{\omega : X(\omega) = 4\}\right)$$

EVENTI DISGIUNTI

$$= \mathbb{P}\{\omega : X(\omega) = 3\} + \mathbb{P}\{\omega : X(\omega) = 4\} =$$

$$= \mathbb{P}\{(0,1,1,1), (1,0,1,1), (1,1,0,1), (1,1,1,0)\} +$$

$$+ \mathbb{P}\{(1,1,1,1)\} =$$

$$= 4 \cdot (0{,}8)^3 \cdot 0{,}2 + (0{,}8)^4 = 0{,}8192$$

IN GENERALE | Prendiamo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

[Si ricorda che $\mathcal{A}$ è una σ-algebra di sottoinsiemi di Ω ed è la classe di eventi sui quali $\mathbb{P}$ è definita: $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$]

Def | UNA VARIABILE ALEATORIA è una funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \{\omega : X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A} \qquad (*)$$

La condizione $(*)$ garantisce che si possa calcolare $\mathbb{P}\{\omega : X(\omega) \le t\}$

<u>OSS</u>: $\{\omega : X(\omega) \le t\} = X^{-1}((-\infty, t])$

Usando la condizione $(*)$ e le proprietà di σ-algebra di $\mathcal{A}$ si vede che, se X è una v.a. (<u>v</u>ariabile <u>a</u>leatoria), allora anche i seguenti insiemi appartengono ad $\mathcal{A}$:

i) $\{\omega : X(\omega) > t\} \in \mathcal{A} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

ii) $\{\omega : X(\omega) < t\} \in \mathcal{A}$ " "

iii) $\{\omega : X(\omega) \ge t\} \in \mathcal{A}$ " "

iv) $\{\omega : X(\omega) \in I\} \in \mathcal{A} \quad \forall\, I$ intervallo $\subset \mathbb{R}$

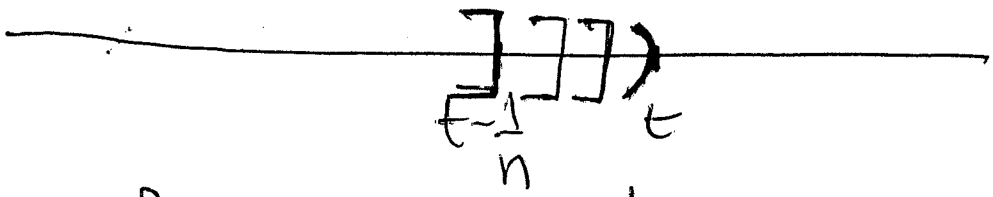
v) $\{\omega : X(\omega) = t\} \in \mathcal{A} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

<u>NOTAZIONE</u>:
$$\{X \in A\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$$
$$\{X < t\} = \{\omega : X(\omega) < t\}$$

i) da $(*)$, $\{X \le t\} \in \mathcal{A}$

$\{X > t\} = \{X \le t\}^c \in \mathcal{A}$ perché è il complementare di un insieme di $\mathcal{A}$.

ii) $\{X<t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq t-\frac{1}{n}\}$



$(*) \Rightarrow \{X \leq t-\frac{1}{n}\} \in \mathcal{A} \quad \forall n \quad \forall t$

per prop. di σ-algebra $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq t-\frac{1}{n}\} \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow \{X<t\} \in \mathcal{A}$

iii) $\{X \geq t\} = \{X<t\}^c \in \mathcal{A}$ per il punto ii) e prop. di σ-algebra.

iv) $\{a \leq X \leq b\} = \underbrace{\{X \geq a\}}_{\in \mathcal{A} \text{ per iii)}} \cap \underbrace{\{X \leq b\}}_{\in \mathcal{A} \text{ per } (*)} \in \mathcal{A}$

v) $\{X=t\} = \{X \geq t\} \cap \{X \leq t\} \in \mathcal{A}$.

V.A. DISCRETE

Sono v.a. che possono assumere solo un # finito di valori oppure un'infinità numerabile di valori (senza punti di accumulazione)

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ sono insiemi DISCRETI

$\{1, 2, 3, \dots, N\}$ è DISCRETO

$\mathbb{Q}$ NON È DISCRETO PUR ESSENDO NUMERABILE

- la v.a. X dell'esempio di inizio lezione è una v.a. discreta perché può assumere un # finito di valori $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- la v.a. Y = mm. (millimetri) pioggia caduti in un giorno a Siena NON è discreta.

X v.a. discreta con valori $\{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$

Abbiamo visto che gli eventi

- $\{X = x_k\} \in \mathcal{A}$ (punto V)) IMPORTANTE!
- questi sono eventi a 2 a 2 disgiunti:

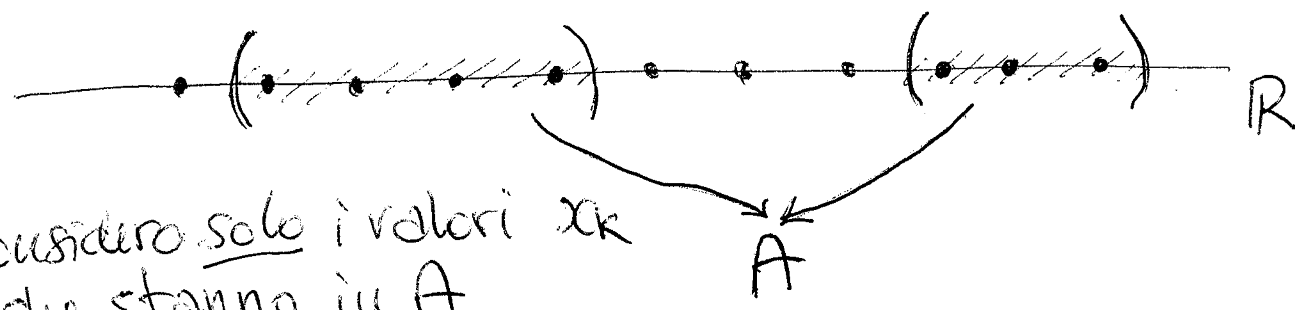
$$\{X = x_k\} \cap \{X = x_h\} = \emptyset \quad \text{se } k \neq h$$

- $A \subseteq \mathbb{R}$, allora si può scrivere:

$$\{X \in A\} = \bigcup_{x_k \in A} \{X = x_k\}$$

partizioniamo l'evento $\{X \in A\}$ nell'unione di eventi elementari

$\bullet = x_k$



Considero solo i valori x_k che stanno in A

Quindi

$$\mathbb{P}\{X \in A\} = \sum_{x_k \in A} \mathbb{P}\{X = x_k\} \quad \leftarrow$$

[È esattamente quello che si è fatto ad inizio lezione:

$$\mathbb{P}\{X \geq 3\} = \mathbb{P}\{X \in [3, +\infty)\} =$$

in $[3, +\infty)$, di tutti i valori che X può assumere, ci stanno solo 3 e 4

$$= \mathbb{P}(\{X=3\} \cup \{X=4\})$$

$$= \mathbb{P}\{X=3\} + \mathbb{P}\{X=4\}$$

Quindi per calcolare probabilità di eventi del tipo $\{X \in A\}$, mi basta conoscere le probabilità di eventi elementari $\{X = x_k\}, k \in \mathbb{N}$

Quando si ha una v.a. discreta X, la funzione $p(x_k) = \mathbb{P}\{X = x_k\}$ si chiama

DENSITÀ (DISCRETA) DI PROBABILITÀ DELLA V.A. X

Se conosco la densità di una V.A. X

posso calcolare:

$$\mathbb{P}(X\in A) = \sum_{x_k \in A} p(x_k)$$

- Ovviamente, se x non è uno dei valori assunti dalla v.a. X,

$$p(x) = \mathbb{P}(X=x) = 0$$

DEFINIZIONE — una densità discreta di probabilità è una funzione $p: \mathbb{R} \to [0,1]$ t.c.:

a) $p(x) > 0$ solo per al più un'infinità numerabile di valori $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$

(e $p(x)=0$ altrove...)

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} p(x_k) = 1$

(infatti $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} p(x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=x_k) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{\{X=x_k\}}\Big) =$

$= \mathbb{P}(\Omega) = 1$

evento certo

sto considerando TUTTI I POSSIBILI VALORI DI X.)

Esempio SCHEMA DI BERNOULLI di PARAMETRO p

Si intende le ripetizioni INDIPENDENTI di un medesimo esperimento che ha probabilità $p \in [0,1]$ di riuscire ogni volta.

Supponiamo di ripetere n volte l'esperimento

Trovare la densità della v.a. $X = \#$ di successi

Formalizzazione: $\Omega = \{ \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{0,1\} \}$

$P\{\omega\} = p^k (1-p)^{n-k}$ $k = \#$ di "1" nella n-upla $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$

$X(\omega) = \#$ di successi nella sequenza $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$

$= \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$

X può assumere solo i valori $\{0, 1, \dots, n\}$

$\Rightarrow$ è una v.a. discreta.

Bisogna calcolare:

$p(k) = P\{X = k\}$ $k = 0, 1, \dots, n$

Quand'è che $X = k$?

$\{\omega : X(\omega) = k\} = \{\omega$ che hanno k "1" e $n-k$ "0"$\}$

in quanti modi diversi riesco a prendere k posizioni su n? $\rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \dots \quad \omega_{n-1} \quad \omega_n$

$\square \quad \square \quad \square \quad \dots \quad \square \quad \square$

devo selezionare tra n caselle le k caselle da mettere $= 1 \rightarrow$ è proprio $\boxed{C_{n,k}}$

Quindi la cardinalità dell'insieme $\{X = k\}$ è $\binom{n}{k}$; quindi:

$$\mathbb{P}\{X=k\} = \binom{n}{k} \underbrace{p^k(1-p)^{n-k}}_{\downarrow}$$

probabilità di ogni elemento di $\{X=k\}$

Quindi:

$$\boxed{p(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{se } k=0,1,\dots,n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}}$$

LEGGE BINOMIALE $B(n,p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$

Quando si dice che X è "distribuita come una binomiale $B(n,p)$", ovvero "$X \sim B(n,p)$", si intende che X è una v.a. discreta che può assumere solo i valori $\{0,1,\dots,n\}$ con la densità $p(k)$ sopra definita.

<u>Verifichiamo</u> che $\sum_{k=0}^{n} p(k) = 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1$$

$$\left[(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right]$$ FORMULA DEL BINOMIO DI NEWTON

La v.a. X di inizio lezione (esempio dei bulloni) è $X \sim B(\underbrace{4}_{\#\text{ di prove}}, \underbrace{0{,}8}_{\text{probabilità di successo di ogni prova}})$

ESERCIZIO 2 Esempio di ripetizione di esperimenti NON indipendenti

Urna contenente $b+r$ palline : $b = \#$ bianche

$r = \#$ rosse

Ne estraiamo n senza reimbussolamento

$X = \#$ di palline bianche estratte

X può assumere qualunque valore in $\{0, 1, \ldots, b\}$

$\Rightarrow$ V.A. DISCRETA.

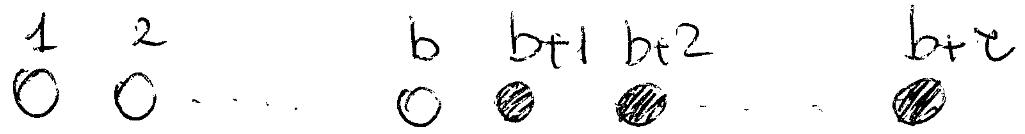
Qual è la sua densità di probabilità?

$$\Omega = \{\omega : \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) ; \omega_i = 0, 1\}$$

$P\{X = k\}$ = probabilità di estrarre esattamente k palline bianche

$$\begin{array}{l} k \leq n \\ k \leq b \end{array} \rightarrow k \leq \min\{n, b\}$$

- Numeriamo le palline



Consideriamo equiprobabili tutti gli esiti di un'estrazione di n palline

$\Omega = \{$ tutti possibili sottoinsiemi di cardinalità n dalle $b+r$ palline $\}$

$=$ sono le Combinazioni di $b+r$ elementi di classe n

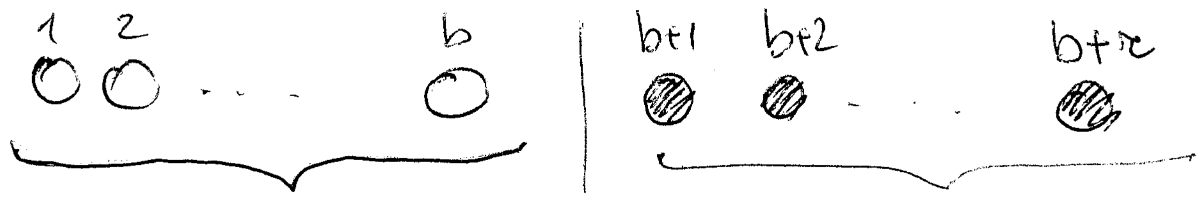
$$\#\Omega = \binom{b+r}{n}$$

Quindi, in ipotesi di equiprobabilità

$$P\{\omega\} = \frac{1}{\#\Omega} = \frac{1}{\binom{b+r}{n}}$$

Quindi $\displaystyle P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\#A}{\binom{b+r}{n}}$

$\{X=k\} = \{$estrazioni con esattamente k bianche$\}$



ne scelgo k
lo posso fare
in $\binom{b}{k}$ modi diversi

ne scelgo $n-k$
lo posso fare in
$\binom{r}{n-k}$ modi diversi

$\rightarrow$ Totale di $\binom{b}{k} \cdot \binom{r}{n-k}$ modi differenti

$$\#\{X=k\} = \binom{b}{k} \cdot \binom{r}{n-k}$$

Quindi
$$p(k)=\mathbb{P}\{X=k\}=\frac{\binom{b}{k}\cdot\binom{r}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}$$
DENSITÀ IPERGEOMETRICA

Esempio | DENSITÀ GEOMETRICA DI PARAMETRO p

Ci rimettiamo nello schema di Bernoulli di parametro p

Per esempio consideriamo lanci ripetuti dello stesso dado per cui $\mathbb{P}\{\text{esce il } 6\}=p$ (normalmente $p=\frac{1}{6}$)

T = tempo del primo successo
cioè il lancio in cui per la prima volta esce il 6

Cioè $T=k \Leftrightarrow$ i primi $k-1$ lanci danno un esito $\neq 6$
il k-esimo lancio dà 6

$\rightarrow$ T può assumere tutti i valori in $\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$ $\Rightarrow$ è v.a. discreta

Consideriamo, per $k\in\mathbb{N}$ fissato, la v.a.

X_k = # di volte che esce il 6 nei primi k lanci

Si è visto che $X_k \sim B(k,p)$

Cosa vuol dire " $T>k$ " in termini di X_k ?

$$T>k \iff X_k=0$$

(Dire che il primo "6" esce dopo il k-esimo lancio, equivale a dire che su k lanci il "6" non è mai uscito)

$$\Rightarrow \{T>k\}=\{X_k=0\}$$

Quindi: $P\{T>k\}=P\{X_k=0\}=\cancelto{1}{\binom{k}{0}}\cancelto{1}{p^0}(1-p)^k=(1-p)^k$

Analogamente, considerando k-1 invece di k:

$$P\{T>k-1\}=(1-p)^{k-1}$$

A questo punto:

$$\{T>k-1\}=\{T=k\}\cup\{T>k\}$$

eventi disgiunti

$$\Rightarrow P\{T>k-1\}=P\{T=k\}+P\{T>k\}$$

$$\Rightarrow P\{T=k\}=P\{T>k-1\}-P\{T>k\}=(1-p)^{k-1}-(1-p)^k$$

$$=(1-p)^{k-1}\big(1-(1-p)\big)=p(1-p)^{k-1}$$

Quindi:

$$p(k)=\begin{cases} p(1-p)^{k-1} & k=1,2,3,\dots \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

- densità geometrica di parametro p -

ESERCIZIO - Verificare che $\sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}=1$.