

Si definisce densità normale (o gaussiana) con media μ e varianza σ^2 , e si indica con $N(\mu, \sigma^2)$, la densità:

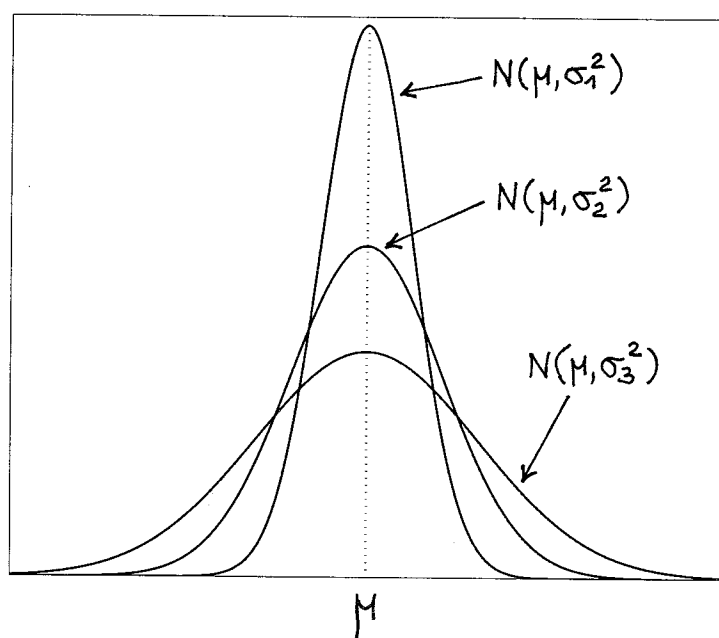
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Se X è una v.a. con densità $N(\mu, \sigma^2)$, si ha che:

$$E[X] = \mu$$

$$\text{Var}(X) = \sigma^2$$

NOTA- La densità f è simmetrica rispetto al valore atteso μ .
La dispersione rispetto a μ dipende dalla varianza σ^2 .



$$\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$$

PROPRIETÀ

Una v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ può essere sempre espressa come

$$X = \sigma Y + \mu$$

dove $Y \sim N(0, 1)$.

Dunque:

(2)

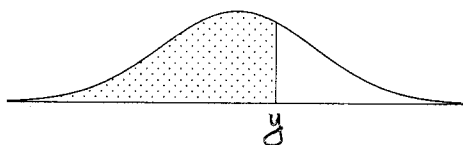
$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq \sigma Y + \mu \leq b) = P(a - \mu \leq \sigma Y \leq b - \mu) =$$

$$= P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq Y \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = F_Y\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - F_Y\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

dove $F_Y(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

~> I valori di F_Y sono tabulati per $y \geq 0$:

NOTA - Se $y < 0$, allora $F_Y(y) = 1 - F_Y(|y|)$.



y	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56750	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76731	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84850	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92786	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95819	.95907	.95994	.96080	.9616	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97933	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99745	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861

Esempio - $F_Y(1.96) = 0.97500$

$$F_Y(-1.96) = 1 - F_Y(1.96) = 1 - 0.97500 = 0.02500$$

MATRICE DI COVARIANZA

3

Sia $X = (X_1, \dots, X_n)$ una v.a. vettoriale con densità di probabilità $f_X(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Il valore atteso di X è:

$$E[X] \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} x f_X(x) dx \Rightarrow \underline{\text{è un vettore}}$$

↓
è un vettore

Si dimostra che:

$$E[X] = (E[X_1], \dots, E[X_n])$$

↓
calcolato utilizzando la densità congiunta di $X_1, \dots, X_n$

↘
calcolati utilizzando le densità marginali di $X_1, \dots, X_n$

Usiamo la notazione: $m_X = E[X]$.

Si definisce MATRICE DI COVARIANZA di $X_1, \dots, X_n$ la matrice:

$$\Sigma_X \triangleq E[(X - m_X)(X - m_X)^T] \Rightarrow \underline{\text{matrice } n \times n}$$

↓
vettore colonna di lunghezza n

↘
vettore riga di lunghezza n

Come è fatta Σ_X ?

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \cdot & \cdot & \cdot & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_1, X_2) & \text{Var}(X_2) & \cdot & \cdot & \cdot & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{Cov}(X_1, X_n) & \text{Cov}(X_2, X_n) & \cdot & \cdot & \cdot & \text{Var}(X_n) \end{bmatrix}$$

Nel caso $n=2$ si riduce a:

4

$$\Sigma_x = \begin{bmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) \\ \text{Cov}(X_1, X_2) & \text{Var}(X_2) \end{bmatrix}$$

OSSERVAZIONE - Σ_x è una matrice simmetrica (cioè $\Sigma_x = \Sigma_x^T$) e, in generale, semidefinita positiva (si scrive $\Sigma_x \geq 0$).

~
↓
 $\forall x \in \mathbb{R}^n. x^T \Sigma_x x \geq 0$



DENSITA' NORMALE MULTIVARIATA

Le v.a. $X_1, \dots, X_n$ si dicono congiuntamente gaussiane se la loro densità congiunta ha l'espressione:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2} (x-m)^T \Sigma^{-1} (x-m)}$$

- densità normale multivariata -

dove:

- $m \in \mathbb{R}^n$
- $\Sigma = \Sigma^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è definita positiva (si scrive $\Sigma > 0$)
~
↓
 $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0. x^T \Sigma x > 0$

Una densità normale multivariata con parametri m e Σ si indica con $N(m, \Sigma)$.

proprietà

- se $X \sim N(m_x, \Sigma_x)$, allora:
 - $E[X] = m_x$ (valore atteso)
 - $E[(X - m_x)(X - m_x)^T] = \Sigma_x$ (matrice di covarianza)

- Se $X_1, \dots, X_n$ sono congiuntamente gaussiane e a due a due scorrelate, cioè

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = 0 \quad \forall i \neq j$$

allora $X_1, \dots, X_n$ sono anche indipendenti.

OSSERVAZIONE - Per v.a. qualsiasi in generale la scorrelazione non implica l'indipendenza. Invece, per v.a. congiuntamente gaussiane, la scorrelazione implica l'indipendenza.

OSSERVAZIONE - Se $X_1, \dots, X_n$ sono congiuntamente gaussiane e indipendenti, allora (dato che $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0, \forall i \neq j$) la matrice di covarianza è nella forma:

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} \text{Var}(X_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \text{Var}(X_2) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & \text{Var}(X_n) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Σ_X è una matrice diagonale.

- Se $X = (X_1, \dots, X_n)$ sono congiuntamente gaussiane, allora per ogni $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$ risulta che $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ definite come

$$Y = AX + b$$

sono congiuntamente gaussiane, cioè $Y \sim N(m_Y, \Sigma_Y)$ con

$$- m_Y = A m_X + b$$

$$- \Sigma_Y = A \Sigma_X A^T$$

CASO PARTICOLARE 1

(6)

$$A = \underbrace{[1 \dots 1]}_{n \text{ volte}}, \quad b=0$$

$$\Rightarrow Y = AX + b = [1 \dots 1] \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = X_1 + \dots + X_n$$

Dunque, $Y = X_1 + \dots + X_n$ è una v.a. gaussiana con valore atteso $m_Y = Am_X + b = m_1 + \dots + m_n$, dove $m_i = E[X_i]$, $i=1, \dots, n$, e varianza $\sigma_Y^2 = A \Sigma_X A^T = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \text{Cov}(X_i, X_j)$, dove $\sigma_i^2 = \text{Var}(X_i)$, $i=1, \dots, n$.

Se, in aggiunta, $X_1, \dots, X_n$ sono indipendenti, e quindi $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0, \forall i \neq j$, allora $\sigma_Y^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$.

Ricapitolando:

- la somma di v.a. congiuntamente gaussiane è ancora una v.a. gaussiana;
- il valore atteso della somma coincide con la somma dei valori attesi degli addendi;
- se le v.a. sono anche indipendenti, la varianza della somma coincide con la somma delle varianze degli addendi.

CASO PARTICOLARE 2

$$A = [0 \dots 0 \underset{\substack{\downarrow \\ i\text{-esimo elemento}}}{1} 0 \dots 0], \quad b=0$$

$$\Rightarrow Y = AX + b = [0 \dots 0 \underset{\substack{\downarrow \\ i\text{-esimo elemento}}}{1} 0 \dots 0] \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = X_i$$

Dunque, $Y = X_i$ è una v.a. gaussiana con valore atteso

$$E[X_i] = A m_x + b = [0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0] \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} = m_i$$

7

e varianza

$$\text{Var}(X_i) = A \Sigma_x A^T = [0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & * & \\ & * & \ddots & \\ & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \sigma_i^2$$

RICAPITOLANDO:

- se $X_1, \dots, X_n$ sono congiuntamente gaussiane, allora ciascuna X_i è una variabile aleatoria gaussiana.

ESERCIZIO - Siano X_1, X_2, X_3 v.a. congiuntamente gaussiane con:

$$E[X_1] = 0, E[X_2] = 2, E[X_3] = -1$$

$$\text{Var}(X_1) = 1, \text{Var}(X_2) = 1, \text{Var}(X_3) = 2$$

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = -1, \text{Cov}(X_1, X_3) = 0, \text{Cov}(X_2, X_3) = 1$$

1. Determinare la densità congiunta di X_1 e X_3 . Sono indipendenti?

Innanzitutto, $X = (X_1, X_2, X_3) \sim N(m_x, \Sigma_x)$ con:

$$m_x = (E[X_1], E[X_2], E[X_3]) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_x = \begin{bmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \text{Cov}(X_1, X_3) \\ \text{Cov}(X_1, X_2) & \text{Var}(X_2) & \text{Cov}(X_2, X_3) \\ \text{Cov}(X_1, X_3) & \text{Cov}(X_2, X_3) & \text{Var}(X_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Si ha che:

$$Y \triangleq \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = AX + b$$

dove $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Dunque, $Y = (X_1, X_3)$ sono congiuntamente gaussiane con:

- $m_Y = (E[X_1], E[X_3]) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \text{verificare che coincide con } Am_X + b$

- $\Sigma_Y = \begin{bmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_3) \\ \text{Cov}(X_1, X_3) & \text{Var}(X_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \text{verificare che coincide con } A \Sigma_X A^T$

Dato che X_1 e X_3 sono congiuntamente gaussiane e scorrelate ($\Leftrightarrow$ la loro matrice di covarianza e' diagonale), esse sono anche indipendenti.

2. Calcolare la densita' congiunta delle v.a. $Y_1 = 2X_1 - X_2 + X_3$ e $Y_2 = -X_1 + 3X_3$. Sono indipendenti?

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2X_1 - X_2 + X_3 \\ -X_1 + 3X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = AX + b$$

dove $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Dunque, $Y = (Y_1, Y_2)$ sono congiuntamente gaussiane con:

- $m_Y = Am_X + b = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$

- $\Sigma_Y = A \Sigma_X A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 19 \end{bmatrix}$

Dato che Y_1 e Y_2 sono congiuntamente gaussiane e scorrelate, esse sono anche indipendenti.

$\hookrightarrow \Sigma_Y$ e' diagonale

Convergenza e approssimazione

Definizione - Siano $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità,

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una v.a. e $\{X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di v.a. Si dice che X_n converge a X quasi certamente (e si indica $X_n \xrightarrow{q.c.} X$) se l'insieme degli $\omega \in \Omega$ taliche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

ha probabilità 1. Si dice che X_n converge a X in probabilità (e si indica $X_n \xrightarrow{P} X$) se, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - X| > \varepsilon\} = 0$$

NOTA - Si può dimostrare $X_n \xrightarrow{q.c.} X$ implica $X_n \xrightarrow{P} X$.

LEGGE DEI GRANDI NUMERI

Sia $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di v.a. indipendenti ed equidistribuite, con valore atteso μ e varianza σ^2 . Allora, posto:

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \quad - \text{media campionaria}-$$

si ha che $\bar{X}_n \xrightarrow{q.c.} \mu$ (e quindi anche $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$).

interpretazione - L'insieme degli eventi $\omega \in \Omega$ per cui $\bar{X}_n(\omega)$ assume valori vicini a μ tende ad avere probabilità 1 per $n \rightarrow \infty$.

NOTA - Calcoliamo il valore atteso di $\bar{X}_n$ per n fissato.

$$E[\bar{X}_n] = E\left[\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right] = \underbrace{\frac{E[X_1] + \dots + E[X_n]}{n}}_{\substack{\text{linearità del} \\ \text{valore atteso}}} = \frac{\overbrace{\mu + \dots + \mu}^{n \text{ volte}}}{n} = \frac{n \cdot \mu}{n} = \mu$$

Definizione - Siano X una v.a. e $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di v.a. scalari.

Siano inoltre $F_X, F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ le rispettive distribuzioni di probabilità. Si dice che X_n converge a X in legge (e si indica $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$) se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F(x)$$

per ogni punto $x \in \mathbb{R}$ in cui F è continua.

NOTA - La convergenza in probabilità implica quella in legge, cioè $X_n \xrightarrow{P} X$ implica $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Dunque la nozione di convergenza in legge è la più debole tra quelle considerate.

TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE

Sia $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di v.a. indipendenti ed equidistribuite con valore atteso μ e varianza $\sigma^2 > 0$. Allora, posto:

$$S_n^* = \frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

si ha che S_n^* converge in legge a una v.a. $N(0,1)$.

NOTA - Si osservi che S_n^* può essere scritta come $S_n^* = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{X}_n - \mu)$, dove $\bar{X}_n$ è la media campionaria. Dunque:

$$E[S_n^*] = E\left[\frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{X}_n - \mu)\right] = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left(\underbrace{E[\bar{X}_n]}_{\mu} - \mu\right) = 0$$

$$\text{Var}(S_n^*) = \text{Var}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{X}_n - \mu)\right) = \frac{n}{\sigma^2} \text{Var}(\bar{X}_n - \mu) = \frac{n}{\sigma^2} \text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{n}{\sigma^2} \frac{\sigma^2}{n} = 1$$

Dunque, per n fissato, S_n^* ha valore atteso nullo e varianza pari a 1.

Il Teorema del Limite Centrale ci dice in più che, per n "grande", la distribuzione di S_n^* tende a quella di una v.a. $N(0,1)$.

APPLICAZIONE- Dall'espressione di S_n^* , si ricava che:

12

$$\bar{X}_n = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} S_n^* + \mu,$$

e quindi, per n grande, si può approssimare la legge di $\bar{X}_n$ con una legge $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Sia X una v.a. (vettoriale) con densità di probabilità f_X nota.

Sia inoltre $Y = \phi(X)$, dove $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione.

Qual è la distribuzione/densità di probabilità di Y ?

Due metodi:

1) metodo della funzione di distribuzione

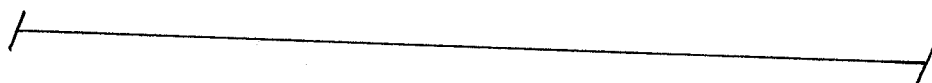
- calcolare $F_Y(y) = P(Y \leq y)$ (distribuzione di probabilità di Y)
- calcolare $f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$ (densità di probabilità di Y)

2) metodo del cambio di variabile ($n=1$)

$$f_Y(y) = \sum_{x_i \in A(y)} \frac{f_X(x_i)}{|\phi'(x_i)|} \quad (\text{densità di probabilità di } Y)$$

dove $\phi'(x) = \frac{d\phi(x)}{dx}$ e $A(y) = \{x \in \mathbb{R} : \phi(x) = y\}$.

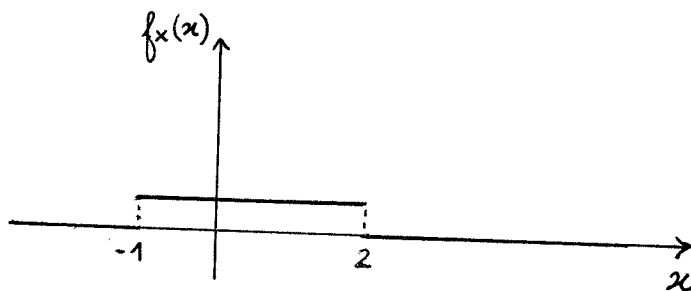
Quindi: $F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(\sigma) d\sigma$



ESERCIZIO - Si consideri una v.a. X con densità uniforme sull'intervallo $[-1, 2]$.
Calcolare la densità di $Y = X^2$.

La densità di X è:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se } -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$Y = \phi(X)$ con $\phi(x) = x^2$.

$$\Rightarrow \forall y \geq 0. \quad A(y) = \{x \in \mathbb{R} : \phi(x) = y\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = y\} = \{-\sqrt{y}, \sqrt{y}\}$$

$\swarrow$ $\searrow$
 x_1 x_2

$$\forall y < 0. A(y) = \{x \in \mathbb{R} : \phi(x) = y\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = y\} = \emptyset$$

$\xrightarrow{\geq 0}$ $\xrightarrow{< 0}$ $\xrightarrow{\text{insieme vuoto}}$

14

1° metodo

- Se $y < 0$:

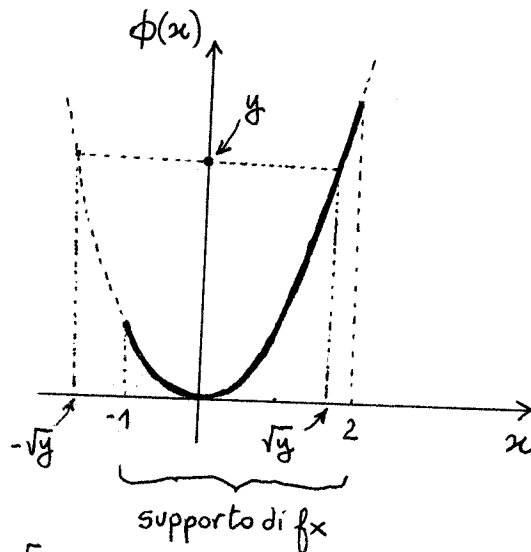
$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = 0$$

perché $Y = X^2$ è sempre non negativa

- Se $0 \leq y \leq 1$:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$$

$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x) dx = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} [x]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} = \frac{2\sqrt{y}}{3}$$



- Se $1 < y \leq 4$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x) dx = \int_{-1}^{\sqrt{y}} \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} [x]_{-1}^{\sqrt{y}} = \frac{1}{3} (1 + \sqrt{y})$$

- Se $y > 4$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x) dx = \int_{-1}^2 \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} [x]_{-1}^2 = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

Ricapitolando:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ \frac{2}{3}\sqrt{y} & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{1}{3}(1 + \sqrt{y}) & \text{se } 1 < y \leq 4 \\ 1 & \text{se } y > 4 \end{cases}$$

- distribuzione di probabilità di Y

Derivando $F_Y(y)$:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{y}} & \text{se } 0 < y \leq 1 \\ \frac{1}{6\sqrt{y}} & \text{se } 1 < y \leq 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- densità di probabilità di Y .

2° metodo

NOTA - $\phi(x) = x^2 \Rightarrow \phi'(x) = 2x$

- Se $y < 0$:

$$f_Y(y) = \sum_{x_i \in A(y)} \frac{f_X(x_i)}{|\phi'(x_i)|} = 0$$

$\searrow$ (insieme vuoto)

- Se $0 < y \leq 1$:

$$f_Y(y) = \sum_{x_i \in A(y)} \frac{f_X(x_i)}{|\phi'(x_i)|} = \frac{f_X(x_1)}{|\phi'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|\phi'(x_2)|} = \frac{f_X(-\sqrt{y})}{|\phi'(-\sqrt{y})|} + \frac{f_X(\sqrt{y})}{|\phi'(\sqrt{y})|} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{|-2\sqrt{y}|} + \frac{\frac{1}{3}}{|2\sqrt{y}|} = \frac{1}{3\sqrt{y}}$$

sono entrambi
nell'intervallo $[-1, 2]$

- Se $1 < y \leq 4$:

$$f_Y(y) = \sum_{x_i \in A(y)} \frac{f_X(x_i)}{|\phi'(x_i)|} = \dots = \frac{f_X(-\sqrt{y})}{|\phi'(-\sqrt{y})|} + \frac{f_X(\sqrt{y})}{|\phi'(\sqrt{y})|} = \frac{0}{|-2\sqrt{y}|} + \frac{\frac{1}{3}}{|2\sqrt{y}|} = \frac{1}{6\sqrt{y}}$$

$\nwarrow$ e' fuori dall'intervallo $[-1, 2]$

$\swarrow$ e' nell'intervallo $[-1, 2]$

- Se $y > 4$:

$$f_Y(y) = \sum_{x_i \in A(y)} \frac{f_X(x_i)}{|\phi'(x_i)|} = \dots = \frac{f_X(-\sqrt{y})}{|\phi'(-\sqrt{y})|} + \frac{f_X(\sqrt{y})}{|\phi'(\sqrt{y})|} = \frac{0}{|-2\sqrt{y}|} + \frac{0}{|2\sqrt{y}|} = 0$$

$\nwarrow$ sono entrambi fuori dall'intervallo $[-1, 2]$.

Abbiamo ottenuto per f_Y la stessa espressione ottenuta con il primo metodo...