AVVISI

Lezione STATISTICA
16/06/2005

1. prenotarsi per il compitino di venerdì 24 giugno
2. mercoledì 22 giugno, ore 14:30
   ESERCITAZIONE CONCLUSIVA
3. sul sito del corso sono disponibili
   i file pdf delle lezioni

INDIPENDENZA

Def - $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a. continue si dicono INDIPENDENTI se, per ogni scelta di $a_1<b_1, a_2<b_2, \dots, a_n<b_n$, si verifica:

$$P(a_1 \le X_1 \le b_1, a_2 \le X_2 \le b_2, \dots, a_n \le X_n \le b_n) =$$
$$= P(a_1 \le X_1 \le b_1) P(a_2 \le X_2 \le b_2) \dots P(a_n \le X_n \le b_n)$$

prop - Sia f la densità congiunta di $X_1, \dots, X_n$, e siano $f_{X_1}, \dots, f_{X_n}$ le rispettive densità marginali. Allora $X_1, \dots, X_n$ sono indipendenti se e solo se

$$f(x) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n) \qquad (*)$$

per ogni $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, tranne al più un insieme di punti di misura nulla.

$\Rightarrow$ Questo risultato ci permette di verificare (operativamente) se n variabili aleatorie $X_1, \dots, X_n$ sono indipendenti, nota la loro densità congiunta.

Infatti, nota la densità congiunta, si possono ricavare le densità marginali, e poi verificare (*).

<u>Esempio</u> - Si considerino due v.a. X e Y la cui densità congiunta è:

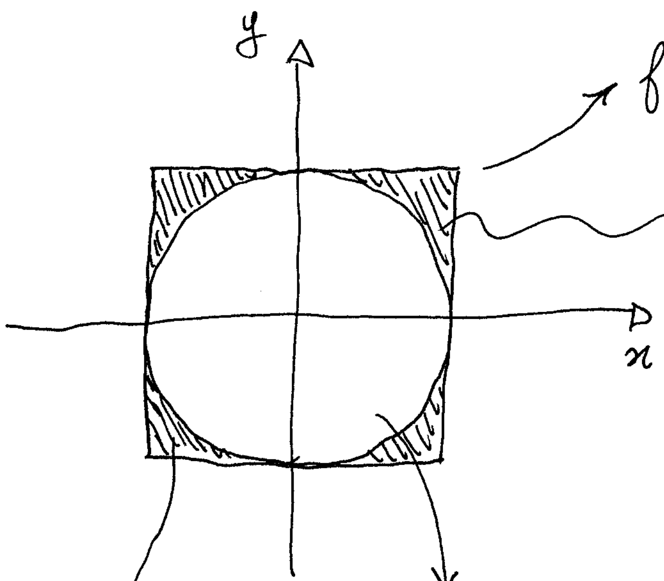
$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{se } x^2+y^2\leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Nella lezione precedente abbiamo calcolato le densità marginali:

$$f_X(x)=\begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & \text{se } -1\leq x\leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & \text{se } -1\leq y\leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Verifichiamo se X e Y sono indipendenti...



$f(x,y)=0$ fuori dal cerchio unitario

su questi settori si ha $f(x,y)=0$ mentre $f_X(x)f_Y(y)\neq 0$

Quindi $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$ su un insieme di misura non nulla

$f_X(x)f_Y(y)\neq 0$ sul quadrato

$f(x,y)\neq 0$ sul cerchio unitario

$\Rightarrow$ X e Y <u>non</u> sono indipendenti

OSSERVAZIONE - In generale, per dimostrare che $X_1, \dots, X_n$ **non** sono indipendenti, **non** basta verificare che

$$f(x) \neq f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n)$$

in un solo punto $x = (x_1, \dots, x_n)$, perché un punto è un insieme di misura nulla.

Però se $f, f_{X_1}, \dots, f_{X_n}$ sono **continue** in x, allora dimostrare che

$$f(x) \neq f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n)$$

è sufficiente per dimostrare che $X_1, \dots, X_n$ **non** sono indipendenti.

Densità condizionali

Siano X e Y due v.a. con densità congiunta f, e densità marginali f_X e f_Y. Si definisce **DENSITÀ CONDIZIONALE** di X dato $Y=y$ la funzione

$$f_{X|Y}(x|y) \triangleq \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \quad \text{se } f_Y(y) \neq 0$$

ATTENZIONE! - x è la variabile, mentre y è fissato.

⤳ La densità condizionale è la densità di probabilità della v.a. X quando so che la v.a. Y ha assunto valore y.

Verifica

- $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f(x,y)^{\nearrow \geq 0}}{f_Y(y)_{\searrow > 0}} \geq 0$

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\,dx = \frac{1}{f_Y(y)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx}_{f_Y(y)}$

$$= \frac{1}{f_Y(y)} \cdot f_Y(y) = 1$$

$\Rightarrow f_{X|Y}(x|y)$ è una densità.

OSSERVAZIONE - Se X e Y sono v.a. indipendenti, allora:

$$f(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

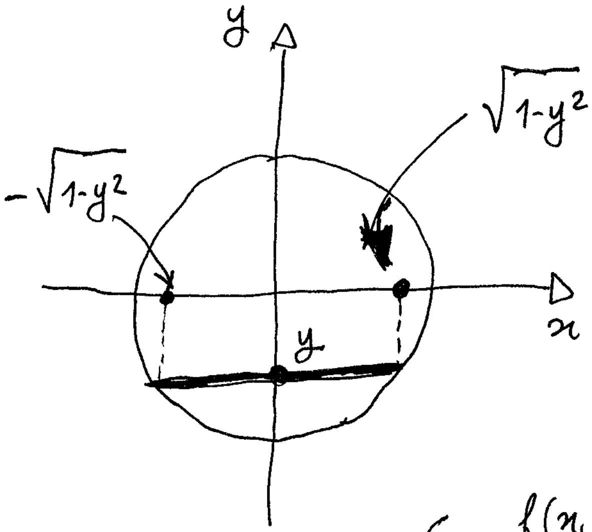
Quindi:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)\,\cancel{f_Y(y)}}{\cancel{f_Y(y)}} = f_X(x)$$

$\Rightarrow$ La conoscenza del valore assunto da Y non ci dà alcuna informazione su X, cioè non modifica la previsione sul valore assunto da X

Esempio - Ancora X e Y con densità uniforme sul cerchio unitario.

Qual è la densità condizionale di X dato Y?



Consideriamo $-1<y<1$ fissato.

Allora x può variare tra $-\sqrt{1-y^2}$ e $\sqrt{1-y^2}$.

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{\frac{1}{\pi}}{\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}} & \text{se } -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Le densità condizionali sono utili per il calcolo della densità congiunta, scritta nella forma:

$$f(x,y) = f_{X|Y}(x|y)\, f_Y(y)$$

Esempio - La durata di vita di un componente elettronico segue una legge esponenziale con parametro λ, il quale a sua volta segue una legge uniforme tra 0 e 1.

Qual è la densità di probabilità della durata di vita del componente?

X = durata di vita del componente elettronico

Λ = parametro della legge esponenziale

$$f_{X|\Lambda}(x|\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x\geq 0\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

– densità condizionale di X dato $\Lambda=\lambda$ –

$$f_{\Lambda}(\lambda)=\begin{cases}1 & \text{se } 0\leq\lambda\leq 1\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

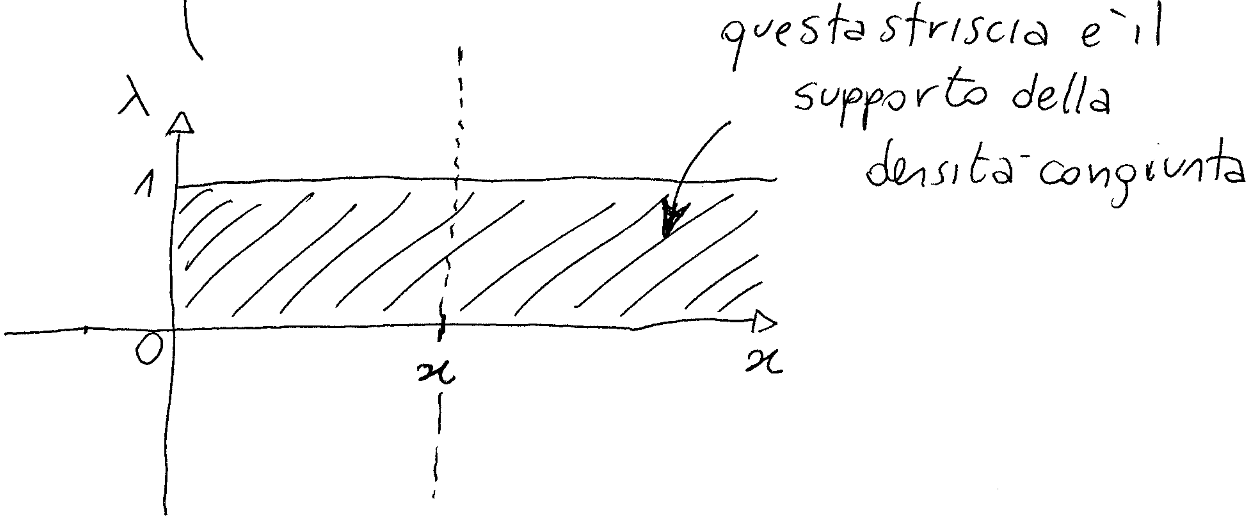
– densità marginale di Λ –

Ricaviamo la densità congiunta di X e Λ utilizzando:

$$\cancel{f(x,\lambda)=f_{X|\Lambda}(x|y)\,f_Y}$$

$$f(x,\lambda)=f_{X|\Lambda}(x|\lambda)\,f_{\Lambda}(\lambda)$$

$$f(x,\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}\cdot & \text{se } x\geq 0,\ 0\leq\lambda\leq 1\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$



Calcoliamo la densità marginale di X;

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\lambda)\,d\lambda$$

CASO 1 - $x < 0$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\lambda)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\lambda = 0$$

CASO 2 - $x \geq 0$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\lambda)\,d\lambda = \int_{0}^{1} \lambda e^{-\lambda x}\,d\lambda =$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\boxed{\int f g' = f g - \int f' g}$$

$$f = \lambda \qquad g' = e^{-\lambda x}$$

$$f' = 1 \qquad g = -\frac{e^{-\lambda x}}{x}$$

$$= \left[-\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{x} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-\lambda x}}{x}\,d\lambda =$$

$$= -\frac{e^{-x}}{x} + 0 + \frac{1}{x}\left[-\frac{e^{-\lambda x}}{x} \right]_0^1 =$$

$$= -\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(1 - e^{-x} - x e^{-x}\right)$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}\left(1 - e^{-x} - x e^{-x}\right) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

VALORE ATTESO

Sia X una v.a. continua con densità $f_X(x)$.

Si dice che X ha <u>speranza matematica finita</u>

se
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x)dx < +\infty$$

[In termini di Analisi I, l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$ è assolutamente convergente]

In questo caso, il valore atteso di X si definisce come:
$$E[X] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$$

Spesso, si scrive $m_X = E[X]$.

<u>PROP</u> - Se X è una v.a. vettoriale e $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, allora la v.a. $Z = \phi(X)$ ha speranza matematica finita se e solo se
$$\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)| f_X(x)dx < \infty$$
In questo caso,
$$E[Z] = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) f_X(x)dx$$

<u>OSSERVAZIONE</u> - Per calcolare $E[Z]$ dalla definizione, cioè
$$E[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty} z f_Z(z)dz$$
occorre conoscere la densità di Z.

~~Quindi~~ Invece la proposizione precedente ci permette di calcolare $E[Z]$ senza calcolare la densità di Z, nota la densità congiunta di X.

Esempio - Sia X una v.a. con legge esponenziale. Calcolare $E[X]$.

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- densità esponenziale con parametro λ -

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx =$$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x}\,dx \underset{\text{per parti}}{\overset{\downarrow}{=}} \ldots = \frac{1}{\lambda}$$

Proprietà del valore atteso

- LINEARITÀ

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

$$E[cX] = c\,E[X] \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

- Se X e Y sono v.a. indipendenti, allora:

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

VARIANZA

Data una v.a. X con densità f_X e valore atteso m_X, si definisce VARIANZA di X la quantità

$$Var(X) \triangleq E[(X-m_X)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_X)^2 f_X(x)\,dx$$

$\Downarrow$

abbiamo ~~ha~~ applicato la proposizione di prima con $\phi(x) = (x-m_X)^2$

proprietà della varianza

- $Var(a+X) = Var(X) \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- $Var(aX) = a^2\, Var(X) \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- $Var(X) = E[X^2] - m_X^2$

↳ espressione alternativa per il calcolo della varianza.

Esempio - Varianza di X che segue una legge esponenziale

$$Var(X) = E[X^2] - m_X^2 = E[X^2] - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx \underset{\text{per parti}}{=} \dots = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow Var(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

COVARIANZA

Def. Date due v.a. X e Y si definisce <u>COVARIANZA</u> la quantità:

$$Cov(X,Y) \triangleq E\left[(X-m_X)(Y-m_Y)\right]$$

dove m_X e m_Y sono i valori attesi di X e Y rispettivamente.

Come si calcola la covarianza?

$Cov(X,Y)$ è un valore atteso del tipo $E[\phi(X,Y)]$ dove $\phi(x,y) = (x-m_X)(y-m_Y)$.

Quindi applicando di nuovo la proposizione di prima:

$$Cov(X,Y) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x,y)\, f(x,y)\, dx\,dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} (x-m_X)(y-m_Y)\, f(x,y)\, dx\,dy$$

dove $f(x,y)$ è la densità congiunta di X e Y.

<u>proprietà della covarianza</u>

- $Cov(X,Y) = E[XY] - m_X m_Y$
- $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y)$
- Se X e Y sono indipendenti, allora

  $Cov(X,Y) = 0$

La scorrelazione e il coefficiente di correlazione per due V.a. X e Y continue sono definite come nel caso discreto:

VALORE ATTESO CONDIZIONALE

Siccome la densità condizionale $f_{X|Y}(x|y)$ è una densità a tutti gli effetti, se ne può calcolare il valore atteso:

$$E_{X|Y}[X|y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_{X|Y}(x|y) \, dx$$

– valore atteso condizionale –