

PROBABILITA' CONDIZIONALE

Lezione STATISTICA ①
13/05/2005

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità.

DEFINIZIONE - Siano $A, B \in \mathcal{A}$ con $P(A) > 0$.

Si definisce PROBABILITA' CONDIZIONALE di B rispetto ad A la quantità:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Intuitivamente - la probabilità condizionale $P(B|A)$ è la probabilità che B si verifichi sapendo che si è verificato A .

Esempio - (uso diretto)

Si gioca alla roulette i numeri $\{3, 13, 22\}$.

- Qual è la probabilità (a priori) di vincere?

$$P(\text{vincere}) = \frac{3}{37} \quad [\text{il risultato della roulette è un numero tra 0 e 36}]$$
$$\approx 0.081$$

- Supponiamo che (dopo la giocata) si venga a sapere che la roulette è truccata in modo da far uscire un numero dispari. Qual è la nuova probabilità di vincere? (a posteriori)

$$P(\text{vincere} | \text{dispari}) \quad A = \{1, 3, 5, \dots, 35\} \quad \#A = 18$$
$$B = \{3, 13, 22\}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 36\} \quad \#\Omega = 37$$

(2)

$$A \cap B = \{3, 13\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#\Omega} = \frac{2}{37}$$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{18}{37}$$

$$\Rightarrow P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{37}}{\frac{18}{37}} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} \approx 0.111$$

$$\Omega^* = \{1, 3, 5, \dots, 35\}$$

$$A^* = \{3, 13\}$$

$$P(A^*) = \frac{\#A^*}{\#\Omega^*} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)}$$

Esempio - (uso inverso)

Estrazione di due palline senza rimpiazzo da un'urna che ne contiene 10 numerate da 1 a 10.

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_i = 1, \dots, 10, i=1, 2, \omega_1 \neq \omega_2\}$$

$$A = \{(2, 5)\}$$

(3)

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{w_1=2, w_2=5\}) = P(\{w_1=2\} \cap \{w_2=5\}) \\ &= P(\{w_1=2\}) P(\{w_2=5\} | \{w_1=2\}) = \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{90} \quad \left(\begin{array}{l} \text{metodo con le} \\ \text{prob. condizionali} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\#\Omega = D_{10,2} = 10 \cdot 9 = 90$$

$$\#A = 1$$

(metodo
"combinatorio")

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{1}{90}$$

TEOREMA DI BAYES

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità.

Consideriamo $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ disgiunti

e tali che $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$.

$\Rightarrow$

PARTIZIONE
DELL'EVENTO
CERTO.

Dato $B \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap \Omega) = P(B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)) = \\ &= P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)) = \\ &= \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P(B|A_i) \end{aligned}$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P(B|A_i)$$

4

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k) P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) P(B|A_i)} \quad k=1, \dots, n$$

↳ Teorema di Bayes

Esempio - Da un'urna contenente b palline bianche e r palline rosse ne viene estratta una senza guardarla. Qual è la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca?

$$\Omega = \{ \omega = (w_1, w_2) : w_i \text{ è il colore della } i\text{-esima pallina estratta, } i=1, 2 \}$$

$$P(\{w_2 = \text{bianco}\}) = P(\{w_2 = \text{bianco}\} \cap \{w_1 = \text{rosso oppure } w_1 = \text{bianco}\})$$

PARTIZIONE DELL'EVENTO CERTO

$$= P(\{w_1 = \text{rosso}, w_2 = \text{bianco}\} \cup \{w_1 = \text{bianco}, w_2 = \text{bianco}\})$$

$$= P(\{w_1 = \text{rosso}, w_2 = \text{bianco}\}) + P(\{w_1 = \text{bianco}, w_2 = \text{bianco}\})$$

EVENTI
DISGIUNTI

$$= P(\{w_1 = \text{rosso}\}) P(w_2 = \text{bianco} | w_1 = \text{rosso}) + P(w_1 = \text{bianco}) P(w_2 = \text{bianco} | w_1 = \text{bianco})$$

$$= \frac{r}{b+r} \cdot \frac{b}{b+r-1} + \frac{b}{b+r} \cdot \frac{b-1}{b+r-1} = \frac{b(b+r-1)}{(b+r)(b+r-1)} = \frac{b}{b+r}$$

INDIPENDENZA

5

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità.
Consideriamo $A, B \in \mathcal{A}$.

DEFINIZIONE - Si dice che A e B sono indipendenti
se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

NOTA - Se A e B sono indipendenti, allora

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$$

Cioè il verificarsi di A non apporta alcuna informazione sul verificarsi o meno di B .

NOTA - eventi disgiunti $\neq$ eventi indipendenti.

Supponiamo $P(A) > 0, P(B) > 0$

- Indipendenza: $P(A \cap B) = P(A)P(B) > 0$
- disgiunti $\Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

Esempio - Lancio di una moneta in modo ripetuto (n volte)

$$\Omega = \{ \omega = (w_1, \dots, w_n) : w_i = 0, 1, i = 1, \dots, n \} \Rightarrow \# \Omega = 2^n$$

$w_i = 0 \Leftrightarrow \text{CROCE}$
 $w_i = 1 \Leftrightarrow \text{TESTA}$

$$A_1 = \{ \omega \in \Omega : w_1 = 1 \} \quad \# A_1 = 2^{n-1} \Rightarrow P(A_1) = \frac{\# A_1}{\# \Omega} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \{ \omega \in \Omega : w_2 = 1 \} \quad P(A_2) = \frac{\# A_2}{\# \Omega} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$$

A_1 e A_2 sono indipendenti?

(6)

$$A_1 \cap A_2 = \{\omega \in \Omega : \omega_1 = 1, \omega_2 = 1\} \quad \#(A_1 \cap A_2) = 2^{n-2}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{\#(A_1 \cap A_2)}{\#\Omega} = \frac{2^{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4}$$

$$P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A_1 \cap A_2)$$

$\Rightarrow A_1$ e A_2 sono indipendenti

(7)

ESERCIZIO 1

Un'urna con n palline, numerate da 1 a n .

Due estrazioni senza rimpiazzo.

Qual è la probabilità di estrarre due numeri consecutivi?

$$\Omega = \{ \omega = (w_1, w_2) : w_i = 1, \dots, n, i=1,2 \text{ e } w_1 \neq w_2 \}$$

$$\#\Omega = D_{n,2} = n(n-1)$$

$$A = \{ \omega \in \Omega : w_2 = w_1 + 1 \} = \{ (1,2), (2,3), (3,4), \dots \}$$

$$\#A = n-1$$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}$$

Esercizio 2

Due dadi lanciati contemporaneamente.

Il primo dado non è truccato $\Rightarrow$

vale l'ipotesi di equiprobabilità -
SOLO X IL PRIMO DADO

Il secondo dado è truccato:

$$P(i) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{se } i=1,2,3,4,5 \\ \frac{1}{2} & \text{se } i=6 \end{cases}$$

Qual è la probabilità che la somma dei numeri ottenuti dai due lanci sia 10?

$$\Omega = \left\{ \omega = (w_1, w_2) : \begin{array}{c} w_1 \text{ è il risultato del lancio del dado non truccato} \\ w_2 \text{ è il risultato del lancio del dado truccato} \end{array} \right\} \quad (8)$$

$$A = \{ \omega \in \Omega : w_1 + w_2 = 10 \} = \{ (4, 6), (5, 5), (6, 4) \}$$

$$P(A) = P\left((4, 6) \cup (5, 5) \cup (6, 4) \right) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{disgiunti}}}{=} \\ = P(4, 6) + P(5, 5) + P(6, 4)$$

$$P(4, 6) = P(w_1 = 4, w_2 = 6) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Indipendenza} \\ \text{dei lanci}}}{=} P(w_1 = 4) P(w_2 = 6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

$$P(5, 5) = P(w_1 = 5, w_2 = 5) = P(w_1 = 5) P(w_2 = 5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{60}$$

$$P(6, 4) = P(w_1 = 6, w_2 = 4) = P(w_1 = 6) P(w_2 = 4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{60}$$

$$P(A) = \frac{1}{12} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} = \frac{7}{60} \approx 0.117$$

Esercizio 3

Una popolazione si compone per il 40% di fumatori (F) e per il 60% di non fumatori (NF). È inoltre noto che il 25% dei fumatori e il 7% dei non fumatori soffre di mal di gola cronico (M).

- Qual è la probabilità che un individuo scelto a caso sia "M"?
- Qual è la probabilità che un individuo "M" sia un fumatore?

Dati - $P(F) = 0.4$ $P(NF) = 0.6$

(9)

$$P(M|F) = 0.25 \quad P(M|NF) = 0.07$$

- $$P(M) = P(M \cap F) + P(M \cap NF) =$$

$\downarrow$
 $NF \text{ e } F \text{ e'}$
una partizione
dell'evento certo

$$= P(F) \cdot P(M|F) + P(NF) P(M|NF)$$

$$= 0.4 \cdot 0.25 + 0.6 \cdot 0.07 = 0.142$$

- $$P(F|M) = \frac{P(F \cap M)}{P(M)} = \frac{P(F) P(M|F)}{P(M)} =$$

$\downarrow$
probabilità
a posteriori

$$= \frac{0.4 \cdot 0.25}{0.142} = 0.704 > P(F)$$

$\downarrow$
probabilità
a priori

Esercizio 4 - Qual e' la probabilita' che tra n persone almeno due festeggino il compleanno lo stesso giorno?

• Numeriamo i giorni dell'anno da 1 a 365

$$\Omega = \{ \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i = 1, \dots, 365, \quad i = 1, \dots, n \}$$

$$\# \Omega = 365^n$$

$$A = \{ \omega \in \Omega : \omega_i = \omega_j \text{ per } \underline{\text{almeno}} \text{ due indici } i \neq j \}$$

$$A^c = \{\omega \in \Omega : \omega_i \neq \omega_j \text{ per ogni } i \neq j\}$$

(10)

$$\#A^c = D_{365,n} = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)$$

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{\#A^c}{\#\Omega} =$$

$$= 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \dots \cdot \frac{365-n+1}{365}$$

$$\underline{n=2} \quad P(A) = 0.0027$$

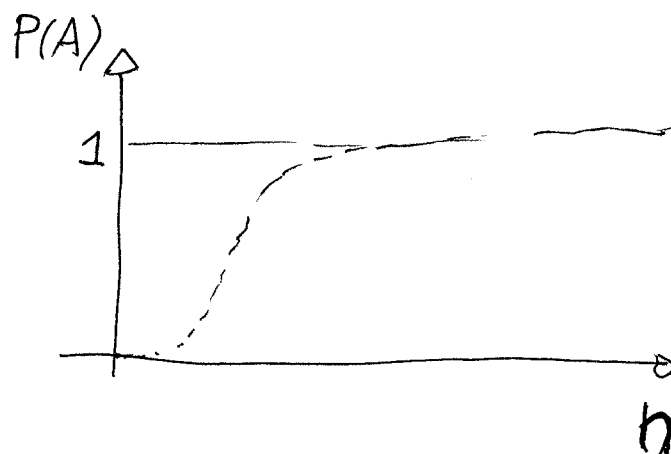
$$\underline{n=10} \quad P(A) = 0.117$$

$$\underline{n=20} \quad P(A) = 0.411$$

$$\underline{n=23} \quad P(A) = 0.5073$$

$$\underline{n=50} \quad P(A) = 0.97$$

$$\underline{n=150} \quad P(A) \approx 1.000$$



Esercizio 5 - Un esperimento casuale da successo con probabilità p , $0 < p < 1$, e da insuccesso con probabilità $1-p$.

L'esperimento viene ripetuto n volte.

Gli esperimenti sono indipendenti.

Qual è la probabilità di ottenere una sequenza prefissata di successi e insuccessi?

n=4 S I S S

I S I S

11

$$\Omega = \left\{ \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : \begin{array}{l} \omega_i = 0 \text{ se l' } i\text{-esimo esperimento ha} \\ \text{dato } \underline{\text{insuccesso}} \\ \omega_i = 1 \text{ se l' } i\text{-esimo esperimento ha} \\ \text{dato } \underline{\text{successo}} \quad i=1, \dots, n \end{array} \right\}$$

Vogliamo calcolare la probabilità di ottenere una prefissata sequenza $\bar{\omega} \in \Omega$.

n=4 $\bar{\omega} = (0, 0, 1, 0)$

$$\begin{aligned} P(0, 0, 1, 0) &= P(\omega_1=0, \omega_2=0, \omega_3=1, \omega_4=0) = \\ &= P(\omega_1=0) P(\omega_2=0) P(\omega_3=1) P(\omega_4=0) = \\ &= (1-p)(1-p)p(1-p) = p(1-p)^3 \end{aligned}$$

$$\bar{\omega} = (1, 0, 0, 0)$$

$$P(1, 0, 0, 0) = p \cdot (1-p)(1-p)(1-p) = p(1-p)^3$$

Sia k il numero di successi nella sequenza $\bar{\omega}$ e quindi $n-k$ il numero di insuccessi.

$$\underline{\underline{P(\{\omega = \bar{\omega}\}) = p^k (1-p)^{n-k}}}$$

$\Rightarrow$ indipendente da come
"successi" e "insuccessi"
si alternano in $\bar{\omega}$!