

12/05/2005

ORARIO DI RICEVIMENTO

Martedì, ore 16.00 ÷ 18.00

Laboratorio Robotica

Via Tommaso Pendola, 37

SPAZI DI PROBABILITÀEsempio - Lancio di un dadopossibili risultati: 1, 2, 3, 4, 5, 6

↘ dare la probabilità di ottenere "1"
significa dare una valutazione di quanto
facilmente (frequentemente) il risultato del
lancio del dado dà "1"

⇒ Si può essere interessati a dare la probabilità
di eventi più complessi come:

- ho ottenuto un numero dispari
- ho ottenuto un numero ≤ 4

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\Leftarrow$ insieme dei possibili risultati

Evento 1: "otengo 1" $A_1 = \{1\}$

Evento 2: "numero dispari" $A_2 = \{1, 3, 5\} \Rightarrow$ sottoinsiemi di Ω

Evento 3: "numero ≤ 4 " $A_3 = \{1, 2, 3, 4\}$

^u "INGREDIENTI" DI UN PROBLEMA DI PROBABILITÀ:

(2)

- 1) insieme dei possibili risultati (Ω)
- 2) eventi (sottoinsiemi di Ω)
- 3) probabilità (applicazione dall'insieme degli eventi a $\mathbb{R}$)

Se $A, B \subseteq \Omega$ sono eventi, allora

- $A \cup B \equiv$ uno almeno dei due eventi si verifica $\equiv$ OR
- $A \cap B \equiv$ entrambi gli eventi si verificano $\equiv$ AND
- $A^c \equiv$ l'evento A non si verifica $\equiv$ NOT
- $\Omega \equiv$ evento certo (si verifica certamente)
- $\emptyset \equiv$ evento impossibile (non si verifica mai)

Esempio - istante in cui un componente elettronico si rompe
(durata di vita del componente)

$$\Omega = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$$

$A_1 = [a, b] \equiv$ componente si rompe in un istante di tempo compreso tra a e b

$A_2 = [a, +\infty) \equiv$ componente vive almeno un tempo a

DEFINIZIONE - Una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di un insieme Ω si dice una σ -algebra se:

(3)

- 1) $\Omega, \emptyset \in \mathcal{A}$
- 2) Se $A \in \mathcal{A}$ allora $A^c \in \mathcal{A}$
- 3) Se $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ allora:
 - a) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$
 - b) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Definizione - Sia Ω un insieme e $\mathcal{A}$ una σ -algebra di sottoinsiemi di Ω . Una PROBABILITA' P è un'applicazione $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ tale che:

- 1) $P(\Omega) = 1$
- 2) Se $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ di elementi di $\mathcal{A}$ a due a due disgiunti, allora:
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$\Downarrow$
 $A_i \cap A_j = \emptyset$
se $i \neq j$

Definizione - Si chiama SPAZIO DI PROBABILITA' una terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ in cui:

- Ω è un insieme
- $\mathcal{A}$ è una σ -algebra di sottoinsiemi di Ω
- P è una probabilità su $\mathcal{A}$

Esempio - Lancio di un dado

4

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots, \{6\}, \\ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \dots \quad (\text{sottoinsiemi di cardinalità } 2) \\ \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \dots \quad (\text{sottoinsiemi di cardinalità } 3) \\ \vdots \end{array} \right.$$

$$\Omega \} \Rightarrow \# \mathcal{A} = 2^6$$

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{6\}) = p$$

ipotesi di
equiprobabilità

$$1 = P(\Omega) = P(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \dots \cup \{6\})$$

$$= P(\{1\}) + P(\{2\}) + \dots + P(\{6\}) = 6p$$

$$\Rightarrow 6p = 1 \Rightarrow \boxed{p = \frac{1}{6}}$$

$$P(\text{dispari}) = P(\{1\} \cup \{3\} \cup \{5\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{ottenere risultato} \leq 4) = P(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\}) = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

SPAZI DI PROBABILITA' UNIFORMI

(5)

Ω di cardinalità finita

IPOTESI DI EQUIPROBABILITA' - $P(\{\omega\}) = p \quad \forall \omega \in \Omega$

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}\right) = \\ = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = p \cdot \#\Omega$$

$$\Rightarrow \boxed{p = \frac{1}{\#\Omega}}$$

$\mathcal{A}$ = sottoinsiemi di $\Omega \quad \Rightarrow$ sono $2^{\#\Omega}$
 $\downarrow$
 σ -algebra
di sottoinsiemi
di Ω

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow P(A) = P\left(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = p \cdot \#A = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

intuitivamente: $\frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$

il calcolo di una probabilità
si riduce al calcolo di cardinalità
di insiemi.

Esempio - probabilità di fare terno al lotto (6)

$$\Omega = \{\text{Cinquine di numeri compresi tra 1 e 30 e distinti\}$$

$$\#\Omega = C_{30,5} = \binom{30}{5} = \frac{30!}{5! 85!}$$

$\Rightarrow$ Abbiamo fissato 3 numeri: x_1, x_2, x_3

$$A = \{\text{Cinquine} \in \Omega \text{ tali che contengano } x_1, x_2, x_3\}$$

$$= \left\{ \{x_1, x_2, x_3, \underset{\uparrow}{*}, \underset{\uparrow}{*}\} \right\}$$

elementi diversi da x_1, x_2, x_3

$$\begin{aligned} \#A &= C_{87,2} = \binom{87}{2} \\ &= \frac{87!}{2! 85!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\#A}{\#\Omega} = \\ &= \frac{\frac{87!}{2! 85!}}{\frac{30!}{5! 85!}} = \frac{1}{11748} \end{aligned}$$

$$= 0.000085$$

Avete giocato $\{1, 2, 3\}$

$$A = \{ \{1, 2, 3, y_1, y_2\} : y_i = 4, \dots, 30; y_1 \neq y_2 \}$$

$$\Rightarrow \#A = C_{87,2}$$

PROPRIETA' DEGLI SPAZI DI PROBABILITA'

7

- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

$$\downarrow$$
$$A \cap A^c = \emptyset$$

(disgiunti)

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$
$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

- $A, B \in \mathcal{A}$

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup A^c) = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$$

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c)$$

disgiunti

- $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B$

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c) = P(A) + \underbrace{P(B \cap A^c)}_{\geq 0} \geq P(A)$$

$$P(A) \leq P(B)$$

- $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)$

↪ utile quando gli eventi sono NON DISGIUNTI

Esempio - Qual è la probabilità di ottenere almeno una volta 6 lanciando due volte un dado?

8

$$\Omega = \{ \omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, i = 1, 2 \}$$

$$A = \{ \omega \in \Omega : \omega_1 = 6 \text{ oppure } \omega_2 = 6 \} = A_1 \cup A_2$$

$$P(A) = P(\overbrace{\{\omega_1 = 6\}}^{A_1} \cup \overbrace{\{\omega_2 = 6\}}^{A_2}) \neq P(\{\omega_1 = 6\}) + P(\{\omega_2 = 6\})$$

$\Downarrow$
tutte le coppie
(6, x)
x = 1, 2, 3, 4, 5, 6

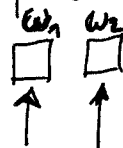
$\Downarrow$ tutte le coppie
(y, 6)
y = 1, 2, 3, 4, 5, 6

La coppia (6, 6) appartiene sia a $\{\omega_1 = 6\}$ che all'evento $\{\omega_2 = 6\} \Rightarrow$ sono eventi non disgiunti

$$= 1 - P(\{\omega_1 \neq 6\} \cap \{\omega_2 \neq 6\}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} = 0.306$$

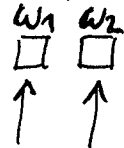
$$P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(A_1^c \cap A_2^c)$$

numero di casi
possibili



$$6 \times 6 = 36$$

numero di
casi favorevoli



$$5 \times 5 = 25$$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

9

$$\begin{aligned}
 P(A \cup B) &= P((A \cup B) \cap \Omega) = P((A \cup B) \cap (A \cup A^c)) = \\
 &= P(A \cup (B \cap A^c)) \stackrel{\substack{\downarrow \\ \text{eventi} \\ \text{disgiunti}}}{=} P(A) + P(B \cap A^c)
 \end{aligned}$$

$$= P(A) + [P(B) - P(A \cap B)]$$

Esempio - (lo stesso di prima)

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \\
 &\quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\
 &\quad \{w_1=6\} \quad \{w_2=6\}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{6+6-1}{36} = \frac{11}{36}$$