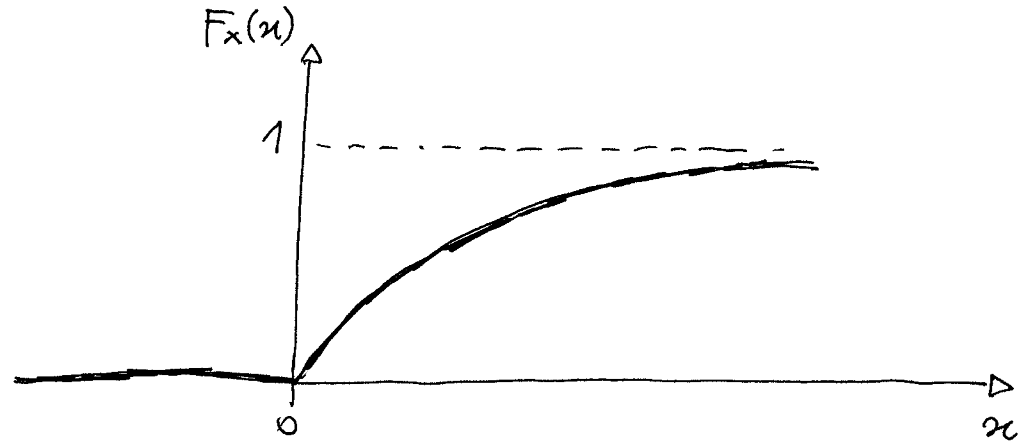
Esempio - Si consideri la funzione di distribuzione:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad \lambda > 0$$



Essendo $F_X(x)$ differenziabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e con derivata continua, allora essa ammette una densità di probabilità che può essere calcolata nel seguente modo:

$$f_X(x) = \frac{d F_X(x)}{dx} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \quad f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

– densità di probabilità esponenziale –

esempio di applicazione – durata di vita di un componente elettronico

DEFINIZIONE – Data una densità f, si definisce SUPPORTO di f l'insieme dei valori della variabile x tali che $f(x) \neq 0$.

Nel caso della densità esponenziale, il supporto è $[0,+\infty)$ ②

⤳ intuitivamente, questo ci dice che una variabile aleatoria X che segue la densità esponenziale non assume valori negativi (in senso probabilistico: $P(a \leq X \leq b) = 0 \;\; \forall a<b<0$)

NOTA- Nel caso della densità uniforme, il supporto è $[a,b]$.

Esempio- DENSITÀ DI PROBABILITÀ NORMALE (o GAUSSIANA)

Data una coppia (μ, σ^2), dove $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$, si definisce densità di probabilità normale con parametri μ e σ^2 la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Questa densità si indica solitamente con $N(\mu, \sigma^2)$.

NOTA- Si definisce a partire dall'integrale notevole:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

- $f(x) \geq 0$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\cancel{\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} \cancel{\sigma}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 1$$

$y = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow x = \sigma y + \mu \Rightarrow dx = \sigma dy$

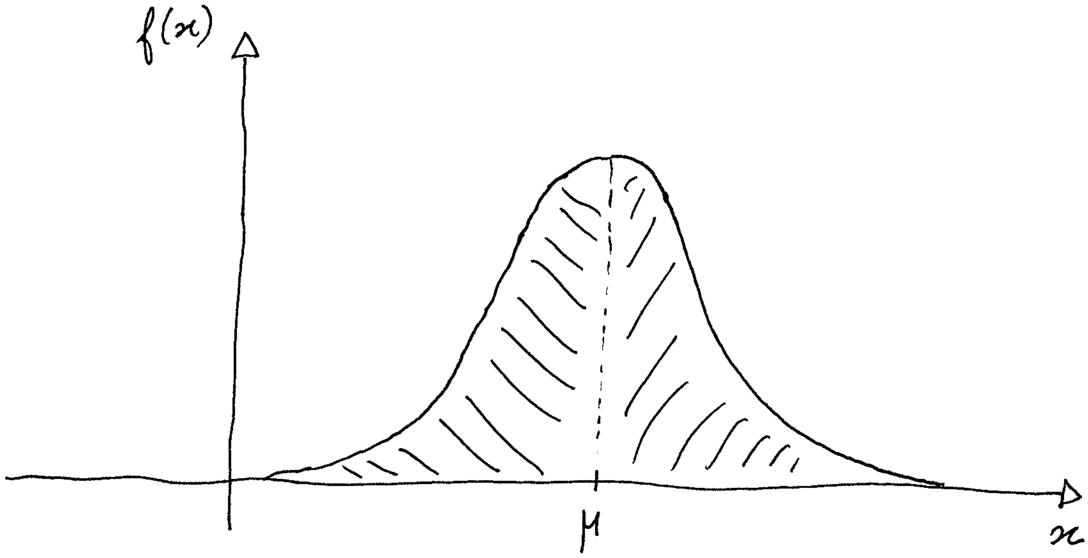
$\Rightarrow$ quindi f è una densità.

<u>NOTA</u> - La funzione <u>non ammette</u> primitiva

Quindi la funzione di distribuzione corrispondente:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$$

non può essere calcolata analiticamente, ma solo numericamente.



$\Rightarrow$ È una funzione simmetrica con centro di simmetria in $x = \mu$.

$\searrow$ questo significa che:

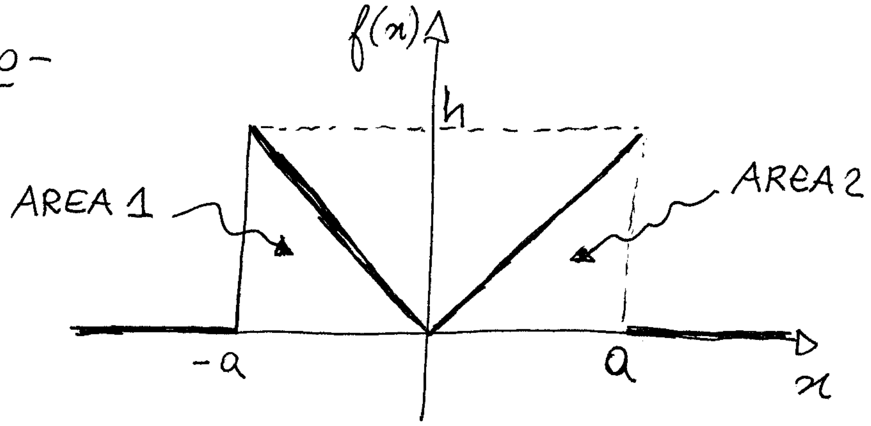
$$P(X<\mu) = P(X>\mu)$$

$\Downarrow$ AREA \\\\ $\qquad$ $\Downarrow$ AREA ////

$$P(X<\mu) = \int_{-\infty}^{\mu} f(x)\,dx \qquad P(X>\mu) = \int_{\mu}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ ~~Dato~~ La forma a campana ci dice che la variabile aleatoria X assume con maggiore probabilità valori "vicini" a μ.

Esempio -



Determinare il valore di h in maniera tale che $f(x)$ sia densità:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- imponiamo che AREA 1 + AREA 2 = 1

$$\frac{ah}{2} + \frac{ah}{2} = ah = 1 \Rightarrow \boxed{h = \frac{1}{a}}$$

VARIABILI ALEATORIE VETTORIALI

DEFINIZIONE - Una variabile aleatoria vettoriale è un vettore di variabili aleatorie scalari:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \quad \text{dove } X_i \text{ è una v.a. scalare, } i = 1, \dots, n.$$

Scriveremo anche: $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Consideriamo un vettore $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
L'evento $\{X \preceq x\}$ corrisponde all'evento:

$$\{X_1 \leq x_1\} \cap \{X_2 \leq x_2\} \cap \dots \cap \{X_n \leq x_n\}$$

Esempio - $P(X \leq x) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$

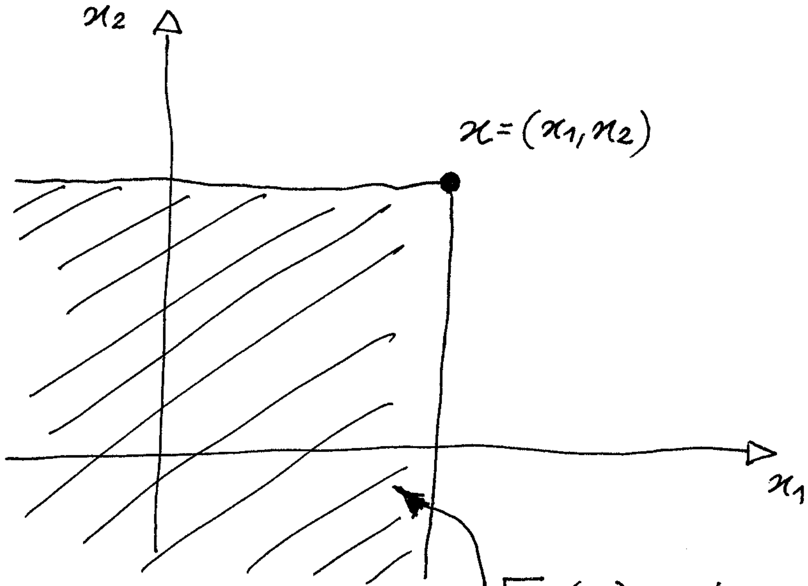
$$= P(X_1 \leq x_1)\, P(X_2 \leq x_2) \dots P(X_n \leq x_n)$$

se gli eventi sono indipendenti...

DEFINIZIONE - Data una variabile aleatoria vettoriale $X = (X_1, \dots, X_n)$ si definisce funzione di distribuzione (oppure di ripartizione) congiunta di $X_1, \dots, X_n$ la funzione:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

esempio - $n=2$



$F_X(x)$ è la probabilità che la variabile aleatoria X assuma valori nell'insieme

$$\{ y = (y_1, y_2) : y_1 \leq x_1,\ y_2 \leq x_2 \}$$

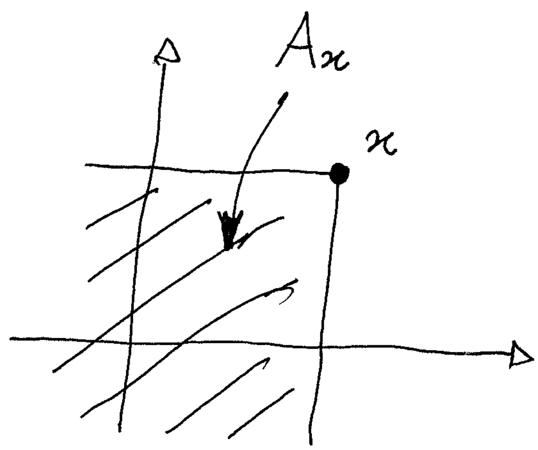
DEFINIZIONE - Una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice una densità se soddisfa:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
- $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = 1$

DEFINIZIONE - Data una variabile aleatoria vettoriale X con distribuzione di probabilità $F_X(x)$, e data una densità $f(x)$, si dice che X ha densità di probabilità $f_X(x) = f(x)$ se:

$$F_X(x) = \int_{A_x} f(y)\, dy$$

dove $A_x = \{ y \in \mathbb{R}^n : y \preceq x \}$

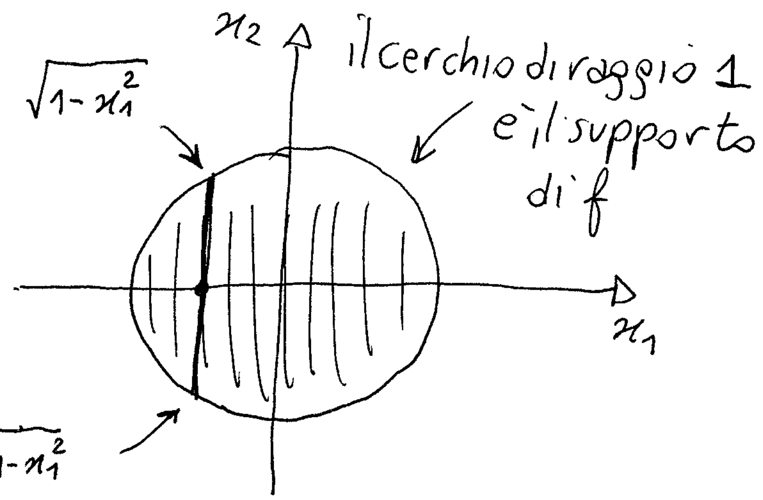


- Se X ha densità di probabilità $f_X(x)$, allora, dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\boxed{P(X \in A) = \int_A f_X(x)\, dx}$$

Esercizio - Si consideri la funzione:

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{se } x_1^2+x_2^2\leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



- Dimostrare che f è una densità di probabilità:

1. $f(x_1,x_2)\geq 0 \quad \forall (x_1,x_2)\in \mathbb{R}^2$

2. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$

$$=\int_{\substack{\text{cerchio}\\ \text{unitario}}} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int_{\substack{\text{cerchio}\\ \text{unitario}}} \frac{1}{\pi}\,dx_1dx_2$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\substack{\text{cerchio}\\ \text{unitario}}} dx_1dx_2 = \frac{1}{\pi}\cdot \text{AREA CERCHIO UNITARIO} = \frac{1}{\pi}\cdot\pi = 1$$

NOTA - $\displaystyle\int_A dx = \text{AREA dell'insieme } A$

~~MODO~~ **Metodo generale**

$$\frac{1}{\pi}\int_{\substack{\text{cerchio}\\ \text{unitario}}} dx_1dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} dx_1dx_2$$

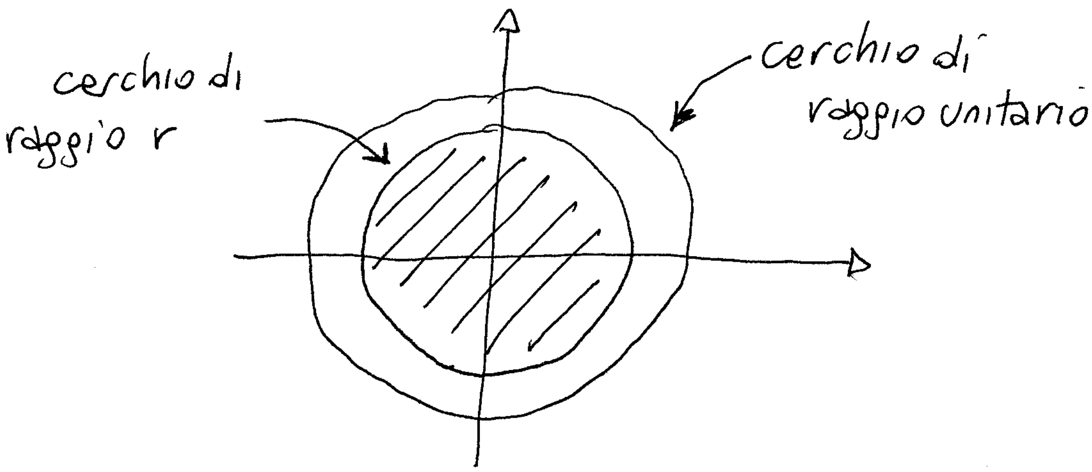
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \underbrace{\left[\int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} dx_2 \right]}_{\left[x_2 \right]_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} = 2\sqrt{1-x_1^2}} dx_1 =$$

$$= \frac{2}{\pi} \underbrace{\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x_1^2}\, dx_1}_{\text{integrale notevole}} = \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx \overset{x=\cos\theta}{=} \int_0^{\pi} \sin^2\theta \, d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Calcolare $P(X \in A)$

$$A = \left\{ (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq r \right\} \quad r < 1$$

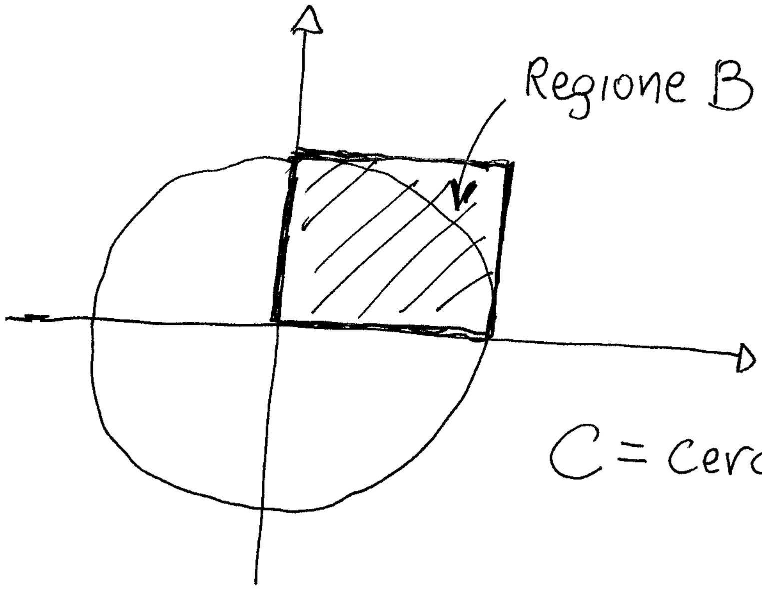


$$P(X \in A) = \int_A f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \frac{1}{\pi} \int_A dx_1 dx_2$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot (\text{AREA di } A) = \frac{1}{\cancel{\pi}} \cancel{\pi} r^2 = r^2$$

Calcolare $P(X \in B)$

$$B = \{ (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1 ,\ 0 \leq x_2 \leq 1 \}$$



C = cerchio unitario

$$P(X \in B) = \int_B f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_{B \cap C} \frac{1}{\pi}\, dx_1 dx_2$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{B \cap C} dx_1 dx_2 = \frac{1}{\pi} (\text{AREA } B \cap C)$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = 1/4$$

$\frac{1}{4}$ AREA DEL CERCHIO UNITARIO

Consideriamo variabili aleatorie bidimensionali:

$X = (X_1, X_2)$ dove X_1 e X_2 sono v.a. scalari

$$F_{X_1}(x_1) = P(X_1 \leq x_1) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq +\infty) =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq t) = \lim_{t \to +\infty} F_X(x_1, t)$$

Le distribuzioni marginali di X_1 e X_2 sono date da:

$$F_{X_1}(x_1) = \lim_{x_2 \to +\infty} F_X(x_1, x_2)$$

$$F_{X_2}(x_2) = \lim_{x_1 \to +\infty} F_X(x_1, x_2)$$

Densità marginali

$$P(a \leq X_1 \leq b) = \int_a^b f_{X_1}(x_1)\,dx_1 \qquad (*)$$

$$\|$$

$$P(a \leq X_1 \leq b, -\infty \leq X_2 \leq +\infty) = \int_a^b \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2$$

$$= \int_a^b \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x_1, x_2)\,dx_2 \right] dx_1 \qquad (**)$$

Uguagliando $(*)$ con $(**)$, si ottiene che:

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x_1, x_2)\,dx_2$$

Analogamente:

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x_1, x_2)\,dx_1$$

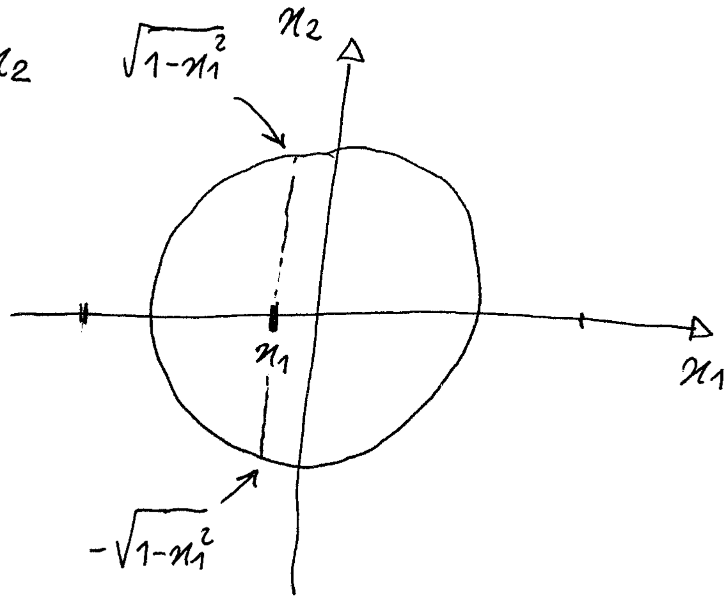
$\Rightarrow$ NOTA - Nota la densità congiunta f_X, è sempre possibile ricavare le densità marginale.

Il viceversa non è sempre possibile.

Esempio -

$$f_X(x_1,x_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & \text{se } x_1^2+x_2^2\le 1\\[2mm] 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

- $$f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x_1,x_2)\,dx_2$$



CASO 1 -

$x_1<-1$ oppure $x_1>1$

$$f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0\cdot dx_2=0$$

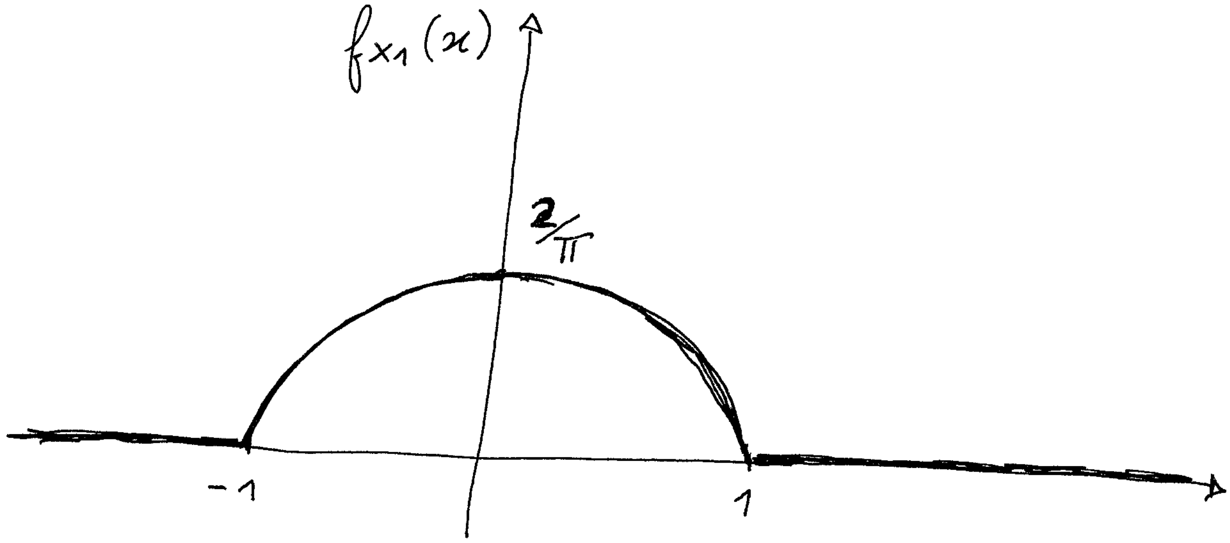
CASO 2 -

$-1\le x_1\le 1$

$$f_{X_1}(x_1)=\int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} \frac{1}{\pi}\,dx_2=\frac{1}{\pi}\left[x_2\right]_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}}=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x_1^2}$$

densità marginale di x_1
per $-1\le x_1\le 1$

$$f_{X_1}(x_1)=\begin{cases}0 & \text{se } x_1<-1\\[2mm] \dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x_1^2} & \text{se } -1\le x_1\le 1\\[2mm] 0 & \text{se } x_1>1\end{cases}$$



La densità marginale di X_2 si calcola allo stesso modo:

$$f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_2 < -1 \\ \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x_2^2} & \text{se } -1 \leq x_2 \leq 1 \\ 0 & \text{se } x_2 > 1 \end{cases}$$