VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

DEFINIZIONE - Si consideri uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Una variabile aleatoria continua è una funzione

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{\omega : X(\omega) \leq x\}$ appartiene ad $\mathcal{A}$, e inoltre il codominio della funzione non è numerabile.

NOTA - si ricordi che codominio numerabile $\Rightarrow$ variabile aleatoria discreta.

Esempio - La variabile aleatoria "durata di vita di un componente elettronico" è una quantità casuale che può assumere qualsiasi valore reale non negativo.

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ

DEFINIZIONE - Data una variabile aleatoria X, si definisce funzione di distribuzione (o di ripartizione) di X la funzione

$$F_X(x) \triangleq P(X \leq x)$$

NOTA - Si osservi che $\{X \leq x\}$ significa $\{\omega : X(\omega) \leq x\}$

questo è un evento in $\mathcal{A}$,
e quindi ne possiamo calcolare
la probabilità

proprietà

1. Se $a < b$, allora $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

   prova - $P(X \leq b) = P(\{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\}) \underbrace{=}_{\text{eventi disgiunti}} P(X \leq a) + P(a < X \leq b)$

   Dunque: $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$.

2. $P(X>a) = 1 - F_X(a)$

prova- $P(X>a) = 1 - P(\underbrace{\{X>a\}^c}_{\text{evento complementare}}) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F_X(a).$

3. $\forall x \in \mathbb{R}.\ 0 \leq F_X(x) \leq 1$

prova- Ovvio, essendo per definizione $F_X(x) = \underbrace{P(X \leq x)}_{\in [0,1]}$.

4. $F_X(x)$ è una funzione non decrescente su $\mathbb{R}$.

prova- Se $a<b$, allora:

$$P(X \leq a) = P(X \leq b) - \underbrace{P(a < X \leq b)}_{\geq 0} \leq P(X \leq b)$$

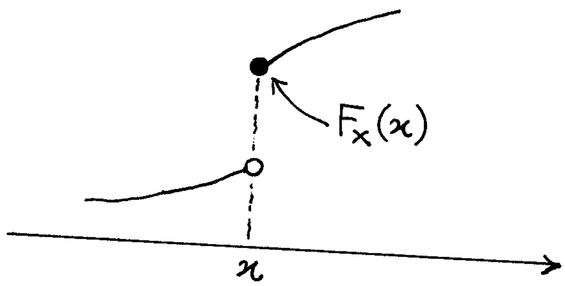
5. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

prova- L'evento $\{X \leq x\}$ tende all'evento "vuoto" quando $x \to -\infty$, e quindi $F_X(x) = P\{X \leq x\} \to P(\emptyset) = 0$ quando $x \to -\infty$.
L'evento $\{X \leq x\}$ tende all'evento "certo" quando $x \to +\infty$, e quindi $F_X(x) = P(X \leq x) \to P(\Omega) = 1$ quando $x \to +\infty$.

6. $F_X(x)$ è continua da destra in ogni $x \in \mathbb{R}$, ossia

$$\lim_{t \to x^+} F_X(t) = F_X(x)$$

Graficamente:

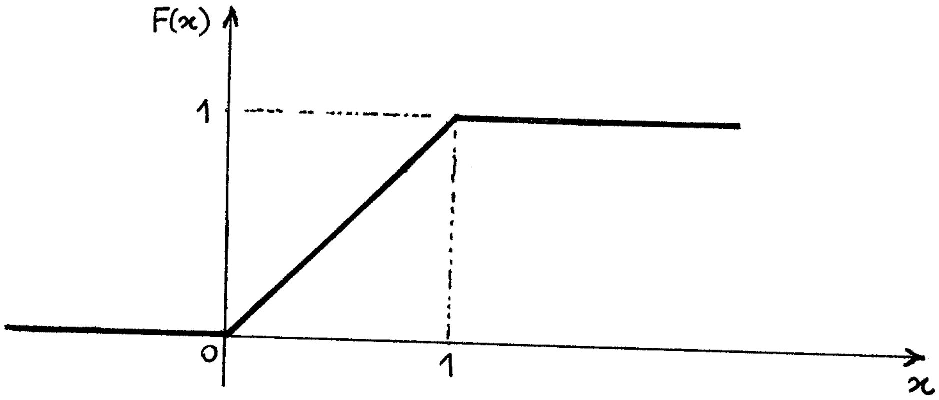


OSSERVAZIONE- Data una funzione $F(x)$, per verificare se essa definisce una distribuzione di probabilità occorre verificare le proprietà 3, 4, 5 e 6.

Esempio - Si consideri la funzione:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ x & \text{se } 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

il cui grafico è il seguente:

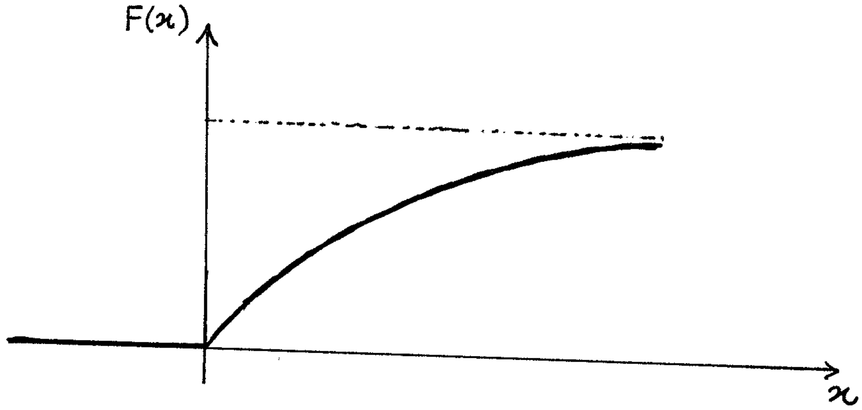


Si verifica facilmente che $F(x)$ soddisfa le proprietà 3, 4, 5 e 6.
$\Rightarrow$ dunque essa definisce una distribuzione di probabilità.

Esempio - Si consideri la funzione:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{se } x > 0 \end{cases} , \quad \text{dove } \lambda > 0$$

il cui grafico è il seguente:



Si osservi che:

- $\dfrac{dF(x)}{dx} = \lambda e^{-\lambda x} > 0$ $\Rightarrow$ strettamente crescente in $(0, +\infty)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 0 = 0$

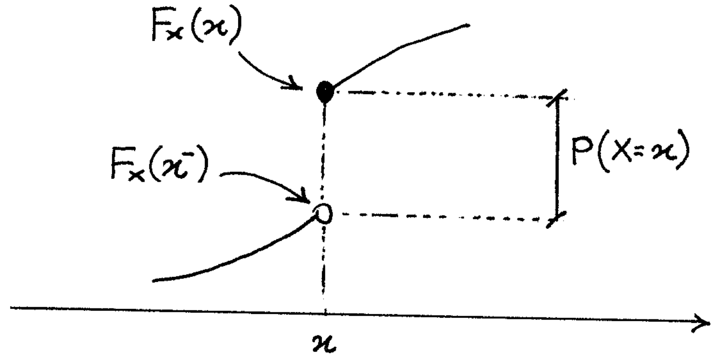
- $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \underbrace{e^{-\lambda x}}_{\searrow 0}) = 1$
- $F(x)$ è continua in ogni $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $F(x)$ soddisfa le proprietà 3, 4, 5 e 6, e quindi definisce una distribuzione di probabilità.

<u>PROPOSIZIONE</u> - $F_X(x) - F_X(x^-) = P(X = x)$

$$F_X(x^-) \stackrel{\Delta}{=} \lim_{t \to x^-} F_X(t)$$

Graficamente:



<u>OSSERVAZIONE</u> - Se F_X è continua in x:

$$P(X=x) = F_X(x) - F_X(x^-) = F_X(x) - F_X(x) = 0$$

$\Rightarrow$ $P(X=x)=0$ anche se è controintuitivo...

<u>OSSERVAZIONE</u> - Se $F_X(x)$ è continua in ogni $x \in \mathbb{R}$, allora le probabilità:

$P(a < X < b)$
$P(a < X \leq b)$
$P(a \leq X < b)$
$P(a \leq X \leq b)$

sono uguali per ogni $a < b$.

Si ricordi inoltre che $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

<u>prova</u> - $P(a < X \leq b) = P(\{a < X < b\} \cup \{X = b\}) \stackrel{\text{eventi disgiunti}}{=} P(a < X < b) + \underbrace{P(X=b)}_{=0} =$

$= P(a < X < b)$

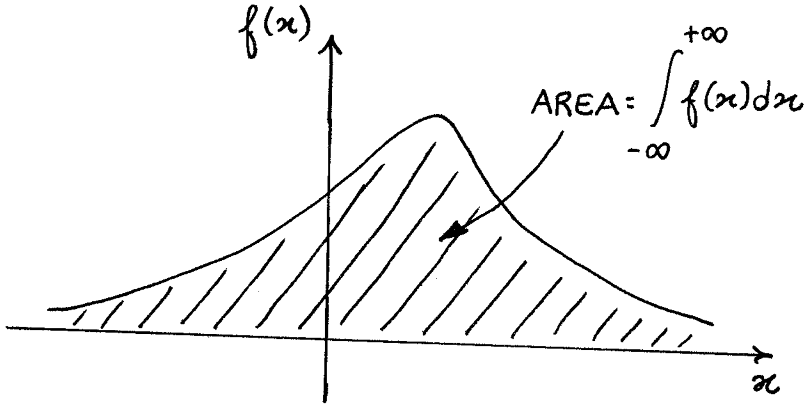
...

FUNZIONE DI DENSITÀ DI PROBABILITÀ

DEFINIZIONE - Una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice una densità se soddisfa:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

NOTA - Essendo $f(x)$ non negativa, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ è l'area sottesa dalla curva.



DEFINIZIONE - Date una variabile aleatoria X con distribuzione di probabilità $F_X(x)$, e una densità $f(x)$, si dice che X ha densità di probabilità $f_X(x) = f(x)$ se

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad (*)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE - Se vale $(*)$, allora $F_X(x)$ è una funzione continua (per le proprietà dell'integrale...).

Dunque se $F_X(x)$ è discontinua, non ammette densità!

1. Se F_X è differenziabile con derivata continua su $\mathbb{R}$ (tranne al più in un numero finito di punti), allora per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale si ha che:

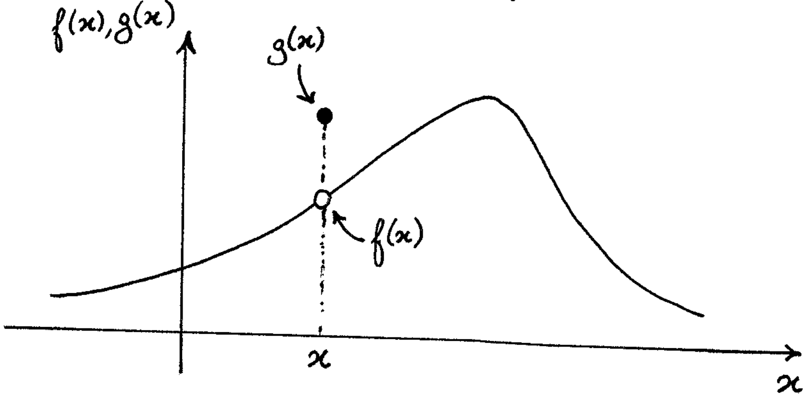
$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

può essere scelta come una densità di probabilità per X.

2. La densità di una variabile aleatoria X, se esiste, <u>non è unica</u>!

Se infatti cambiamo i valori assunti da $f(x)$ in un insieme di misura nulla (per esempio, in un numero finito di punti), e chiamiamo $g(x)$ la nuova funzione così definita, allora $g(x)$ è ancora una densità per la variabile aleatoria X.

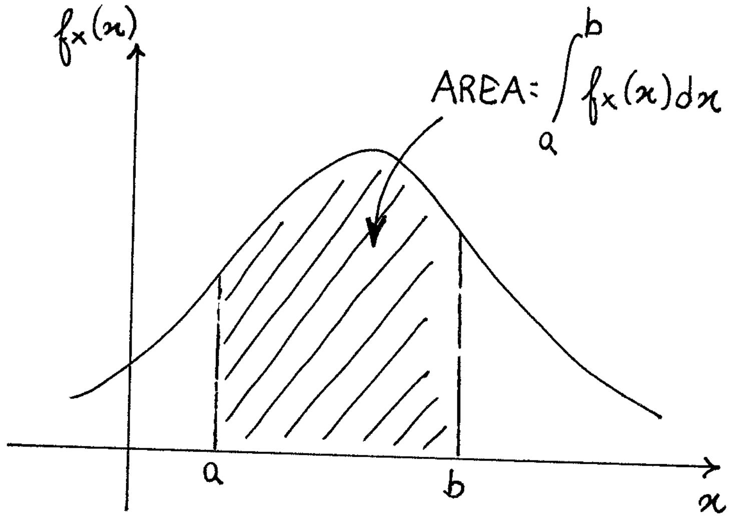
gli integrali in (*) non cambiano sostituendo f con g!



<u>OSSERVAZIONE</u> - L'utilizzo delle densità di probabilità permette di svolgere il calcolo di probabilità come calcolo di aree.

<u>Esempio</u> - $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx = \int_{a}^{b} f_X(x)\,dx$

Si ricordi che se F_X ammette densità, allora F_X è continua.
Se F_X è continua, allora $P(X=a)=0$ ...

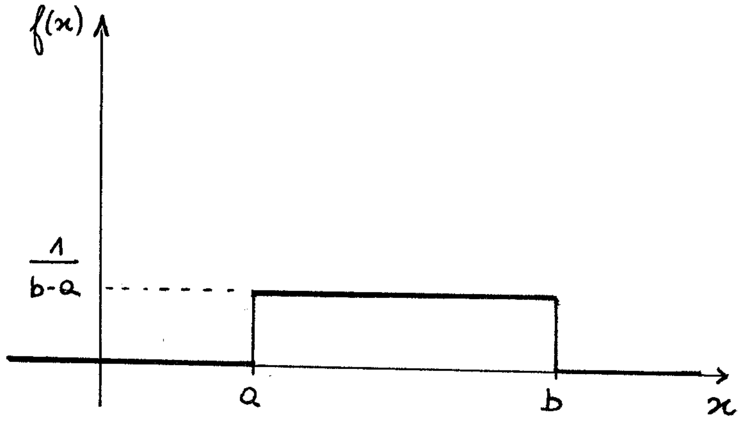


Esempio - DENSITÀ DI PROBABILITÀ UNIFORME

Sia $a<b$, e si consideri la funzione:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x<a \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{se } a\le x\le b \\ 0 & \text{se } x>b \end{cases}$$

il cui grafico è il seguente:



- $f(x)\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx = \frac{1}{b-a}\,[x]_a^b = \frac{1}{\cancel{b-a}}\,(\cancel{b-a}) = 1$

oppure: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \text{AREA RETTANGOLO} = \underbrace{(b-a)}_{\text{base}}\cdot\underbrace{\frac{1}{b-a}}_{\text{altezza}} = 1$

$\Rightarrow$ dunque $f(x)$ definisce una <u>densità</u>.

Qual è la distribuzione di probabilità $F_X(x)$ con densità $f(x)$?

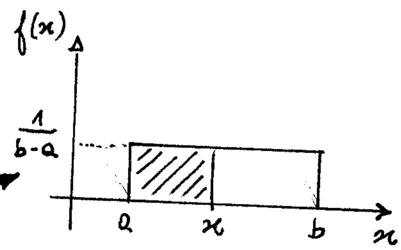
$\rightsquigarrow$ Dobbiamo calcolare $F_X(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.

<u>Se $x<a$:</u>

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

<u>Se $a\le x\le b$:</u>

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} 0\,dt + \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{x-a}{b-a}$$



Se $x > b$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{a} 0\,dt + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\,dt + \int_{b}^{x} 0\,dt = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

Dunque:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{se } a \le x \le b \\ 1 & \text{se } x > b \end{cases}$$

Notare che $F(x)$ è continua!