

SERIE GEOMETRICA

Lezione STATISTICA

①

06/05/2005

$$x \in \mathbb{R}, x \neq 1$$

$$\sum_{k=0}^N x^k = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$$

$$\text{Se } |x| < 1 \text{ allora } \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

CALCOLO COMBINATORIO

X è un insieme

$\#X =$ la cardinalità di X

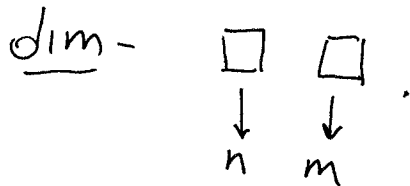
↳ numero di elementi di X

Consideriamo insiemi con cardinalità finita, cioè $\#X < \infty$.

REGOLA - due insiemi in corrispondenza biunivoca hanno la stessa cardinalità.

(2)

Dati un insieme X con cardinalità n
 e un insieme Y con cardinalità m ,
 allora la cardinalità del prodotto
 cartesiano $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$
 è nm .



PERMUTAZIONI X con cardinalità n

Definizione - Ogni ordinamento dell'insieme X
 si dice PERMUTAZIONE.

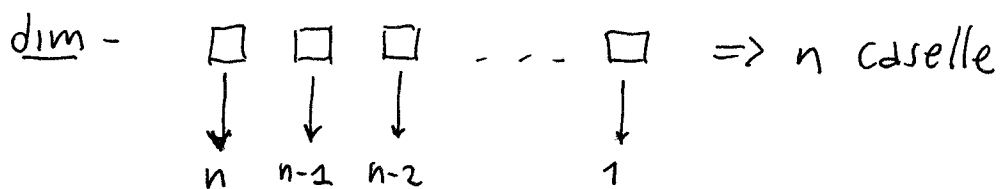
↑
 tutti gli elementi
 di X sono distinti

Es. - $X = \{a, b, c\}$

$abc, acb, bac, bca, cab, cba,$

P_n = numero di permutazioni di n elementi distinti

Teorema - $P_n = n!$



$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

□

Es - Quanti sono i modi di disporre 7 persone in fila?
 $\Rightarrow 7!$

PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONE

X ha ancora cardinalità n

- n_1 elementi appartenenti al 1° tipo
- n_2 elementi " " 2° tipo, distinti dai precedenti
- :
- n_h elementi " " h ° tipo, distinti dai precedenti

$$n_1 + n_2 + \dots + n_h = n$$

Es. $X = \{a_1, a_2, b\}$

$$a_1, a_2 \in \text{TIPO A}$$

$$b \in \text{TIPO B}$$

$$a_1 b a_2 = a_2 b a_1$$

Quante sono le permutazioni con ripetizione degli elementi di X ?

↙ indicano questo numero
con $p_{n_1, n_2, \dots, n_h}^*$

Teorema - $p_{n_1, n_2, n_h}^* = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_h!}$

dim. - $\square \square \square \dots \square$

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_h!}$$

$\square$

$$\begin{array}{l} a_1 b_1 a_2 a_3 b_2 a_4 \\ a_2 b_1 a_1 a_3 b_2 a_4 \end{array} \quad \frac{6!}{4! \cdot 2!}$$

Esempio - Quanti sono i possibili anagrammi della parola ANAGRAMMA?

$$X = \{A, N, A, G, R, A, M, M, A\} \quad \#X = 9$$

1 TIPO: "A" $n_1 = 4$

2 TIPO: "N" $n_2 = 1$

3 TIPO: "G" $n_3 = 1$

4 TIPO: "R" $n_4 = 1$

5 TIPO: "M" $n_5 = 2$

$$P_{4,1,1,1,2}^* = \frac{9!}{4! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!} = 7560$$

Esempio - Consideriamo le quaterne di numeri naturali $\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$, $n_i \in \mathbb{N}$.

Quante sono le quaterne soluzione dell'equazione

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 7 \quad ?$$

$$2 + 1 + 3 + 1 = 7$$

↓

$$** + * + *** + *$$

$$P_{7,3}^* = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120$$



$$X = \left\{ \underbrace{*, *, *, *, *, *, *}_7, \underbrace{+, +, +}_3 \right\}$$

****++**+*

5

$$4 + 0 + 2 + 1$$

CASO PARTICOLARE

$$\boxed{h=2}$$

$$n_1 \Rightarrow k$$

$$n_2 \Rightarrow n-k$$

$$P_{k,n-k}^* = \frac{n!}{k!(n-k)!} \stackrel{A}{=} \binom{n}{k}$$

↓
coefficiente binomiale di
grado n

formula del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$n=0 \quad 1$$

$$n=1 \quad 1 \quad 1$$

$$n=2 \quad 1 \quad 2 \quad 1$$

$$n=3 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

TRIANGOLO DI TARTAGLIA

$$a=b=1 \Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n}$$

COMBINAZIONI

6

Definizione - Sia X un insieme con cardinalità n .

Ogni sottoinsieme di X costituito da k elementi ($0 \leq k \leq n$) viene detto **COMBINAZIONE** di n oggetti di classe k .

↳ indicano il numero di tutte le possibili combinazioni di n oggetti di classe k con $C_{n,k}$

es. $X = \{a, b, c, d\}$ $k=2$

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}$

$\{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$

$C_{n,k}$ corrisponde al numero di modi diversi in cui si possono scegliere k elementi tra n (distinti) dati

Teorema - $C_{n,k} = \binom{n}{k}$

dim. - $X \Rightarrow 1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n$

$\ast \ 0 \ \ast \ \dots \ \ast$

$\Rightarrow \ast =$ ho scelto l'elemento i -esimo

$0 =$ non ho scelto l'elemento i -esimo

sequenza con $k \ast$ e $n-k \ 0$

$$C_{n,k} = P_{k, n-k}^{\ast} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad \square$$

(7)

Esempio - In quanti modi si possono scegliere 5 carte da un mazzo di 40 senza rimpiazzo?

$$C_{40,5} = \frac{40!}{5! \cdot 35!}$$

Esempio - Quanti sono i possibili sottoinsiemi di un insieme di n elementi?

Es. $X = \{a, b, c\}$

$\rightarrow \emptyset$

$\{a\}, \{b\}, \{c\}$

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$

$\{a, b, c\}$

- insieme vuoto : $1 \stackrel{\Delta}{=} \binom{n}{0}$
- sottoinsieme di un elemento : $\binom{n}{1}$
- " di 2 elementi : $\binom{n}{2}$
- " di k elementi : $\binom{n}{k}$
- " di n elementi : $\binom{n}{n}$

$$1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$\binom{n}{0} \stackrel{\Delta}{=} 1$

□

COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE

8

Definizione - Sia X un insieme con cardinalità n .
Ogni raggruppamento di k elementi di X
ammettendo anche ripetizioni di oggetti,
viene detto combinazione con ripetizione
di n oggetti di classe k .

- 1) k può essere maggiore di n
- 2) Indichiano il numero di combinazioni con
ripetizione con $C_{n,k}^*$

Es - $X = \{a, b, c, d\}$ $k=2$

(aa), ab, ac, ad

(bb), bc, bd

(cc), cd

(dd)

Teorema - $C_{n,k}^* = \binom{n+k-1}{k}$

dim - $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$

x_i : numero di volte che ho scelto
l'elemento i -esimo

$x_i = \alpha \Rightarrow \underbrace{** \dots *}_{\alpha \text{ volte}}$

$$\begin{array}{ccccccc}
 (* \dots *) & + & (* \dots *) & + & \dots & + & (* \dots *) \\
 \Downarrow & & \Downarrow & & & & \Downarrow \\
 n_1 & & n_2 & & & & n_n
 \end{array}$$

// Stringa con k "*" e $n-1$ "+"

$$C_{n,k}^* = P_{k,n-1}^* = \frac{(n+k-1)!}{k! (n-1)!} = \binom{n+k-1}{k} \quad \square$$

// l'insieme delle combinazioni con ripetizione di n elementi di classe k e' in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle permutazioni con ripetizione di k "*" e $n-1$ "+".

Esempio - In quanti modi si possono scegliere

5 carte da un mazzo di 40 con rimpiazzo?

$$\Rightarrow C_{40,5}^* = \binom{44}{5}$$

DISPOSIZIONI

10

Definizione - Si dice disposizione di n oggetti di classe k ($0 \leq k \leq n$) ogni ordinamento di k oggetti comunque scelti tra gli n .

oss. - due disposizioni possono differire o per gli oggetti contenuti oppure per l'ordine degli oggetti.

✗ il numero di disposizioni di n oggetti di classe k lo indichiamo con $D_{n,k}$.

oss. - Se $k=n$ allora permutazioni $\equiv$ disposizioni.

Es. - $X = \{a, b, c, d\}$ $k=2$

ab ac ad
ba bc bd
ca cb cd
da db dc

Teorema - $D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = C_{n,k} \cdot P_k$

dim. - $\square \quad \square \quad \dots \quad \square$ k caselle
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \dots \quad \downarrow$
 $n \quad n-1 \quad \dots \quad n-k+1$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)\cancel{(n-k)}\dots\cancel{1}}{\cancel{(n-k)}\dots\cancel{1}} = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

→ possibili scelte di k elementi in un insieme di n : $C_{n,k}$
 possibili permutazioni di k elementi: P_k

$$\Rightarrow D_{n,k} = C_{n,k} \cdot P_k \quad \square$$

Esempio - Estrazione ^{senza rimpiazzo} di 5 palline da un'urna dove sono presenti 30 palline numerate da 1 a 30.
 Quante sono le possibili sequenze che posso ottenere?

$$\Rightarrow D_{30,5}$$

DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE

Definizione - Se in una disposizione di n oggetti di classe k si possono ripetere gli oggetti (e quindi k è qualsiasi), si parla di disposizione con ripetizione di n oggetti di classe k .

$\Downarrow$ il loro numero si indica con $D_{n,k}^*$.

Teorema - $D_{n,k}^* = n^k$.

dim - $\square \square \dots \square$ k caselle
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $n \quad n \quad \quad n \Rightarrow n^k \quad \square$

Esempio - Estrazione con rimpiazzo di 5 palline
da un'urna che ne contiene 30 numerate
da 1 a 30. Quante sono le possibili
sequenze che posso ottenere?

12

$$\Rightarrow D_{30,5}^*$$

Teorema del crivello

Due insiemi A_1 e A_2 con cardinalità finita, allora:

$$\boxed{\#(A_1 \cup A_2) = \#A_1 + \#A_2 - \#(A_1 \cap A_2)}$$

Esempio - consideriamo n variabili
 x_i che possono assumere
i valori $\{1, 2, \dots, N\}$.

$$X = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : \begin{array}{l} x_i = 1, 2, \dots, N \text{ e} \\ \text{almeno due elementi sono uguali} \end{array} \right\}$$

$$X^c = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : \begin{array}{l} x_i = 1, 2, \dots, N \text{ e} \\ \text{tutti gli elementi sono diversi} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow X \cap X^c = \emptyset \quad [\text{insieme vuoto}]$$

$$X \cup X^c = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i = 1, 2, \dots, N \right\}$$

$$\#(X \cup X^c) = D_{N,n}^* = N^n$$

$\downarrow$
 N

$\downarrow$
 N

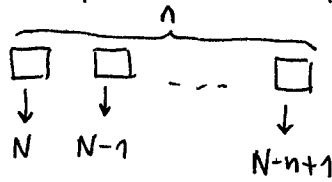
$\dots$

$\downarrow$
 N

$\underbrace{\square \square \dots \square}_n$

$$\# X^c = D_{N,n} = N(N-1) \dots (N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!}$$

↓ conta l'ordine, perché ad esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$



$$\# (X \cap X^c) = \# \emptyset = 0$$

$\Rightarrow$ Teorema del Crivello

$$\# X = \# (X \cup X^c) - \# X^c + \# (X \cap X^c)$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ N^n & \frac{N!}{(N-n)!} & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{\# X = N^n - \frac{N!}{(N-n)!}}$$