Esercizio. Un'urna contiene 112 dadi di cui la metà sono equilibrati, mentre gli altri sono stati manipolati in modo che, per ciascuno di essi, la probabilità di ottenere 1 sia pari a $\frac{1}{2}$, mentre ogni altro risultato si verifica con probabilità $\frac{1}{10}$.

a) Un dado viene estratto a caso e lanciato. Indicando con x il risultato del lancio, si calcoli la probabilità di ottenere 3 ed il valor medio $\mathbf{E}[x]$ di x.

b) Un dado viene estratto a caso e lanciato due volte ottenendo 2 e 3. Qual è la probabilità che si tratti di uno dei dadi truccati?

c) Un dado viene estratto a caso e lanciato due volte. Si indichi con x ed y il risultato dei due lanci. Si tratta di v.a. indipendenti?

1

112 dadi < 56 equilibrati / 56 truccati in modo che $p(1) = \frac{1}{2}$ e $p(i) = \frac{1}{10}$ per $i = 2, .., 6$

a) Consideriamo gli eventi:

$T \equiv$ è stato estratto un dado truccato

$E \equiv$ è stato estratto un dado equilibrato

e la v.a.

$X \equiv$ risultato del lancio del dado estratto

Calcoliamo la densità discreta di probabilità di X.

Si osservi che X può assumere i valori $k = 1, 2, .., 6$.

$$P(X=1) = P(T)P(X=1|T) + P(E)P(X=1|E) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \triangleq p_X(1)$$

$$P(X=2) = P(T)P(X=2|T) + P(E)P(X=2|E) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{20} + \frac{1}{12} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15} \triangleq p_X(2)$$

Il calcolo non cambia per $k = 3, 4, 5, 6$. Dunque:

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se } k = 1 \\ \frac{2}{15} & \text{se } k = 2,3,4,5,6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

NOTA - Si osservi che:

$$\sum_{k=1}^{6} p_X(k) = \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{2}{15} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1,$$

come deve essere perchè $p_X(k)$ è una densità di probabilità discreta.

$$E[X] = \sum_{k=1}^{6} k\, p_X(k) = 1 \cdot \frac{1}{3} + (2+3+4+5+6) \cdot \frac{2}{15} = \frac{1}{3} + 20 \cdot \frac{2}{15} = \frac{9}{3} = 3.$$

b) Consideriamo le v.a.:

$X \equiv$ risultato del primo lancio del dado estratto

$Y \equiv$ risultato del secondo lancio del dado estratto

Si deve calcolare:

$$P(T \mid X=2, Y=3) = \frac{P(T)P(X=2, Y=3 \mid T)}{P(T)P(X=2, Y=3 \mid T) + P(E)P(X=2, Y=3 \mid E)}$$

Teorema di Bayes

Si osservi che, se sappiamo di che tipo è il dado, i risultati dei due lanci sono indipendenti, dunque:

$$P(X=2, Y=3 \mid T) = P(X=2 \mid T)\, P(Y=3 \mid T) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$$

$$P(X=2, Y=3 \mid E) = P(X=2 \mid E)\, P(Y=3 \mid E) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

In conclusione:

$$P(T \mid X=2, Y=3) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{36}} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{100} + \frac{1}{36}} = \frac{36}{136} = \frac{9}{34} \simeq 0.265$$

NOTA - Si osservi che $P(T \mid X=2, Y=3) < P(T) = 0.5$.

probabilità a posteriori

probabilità a priori

Infatti, l'aver ottenuto i risultati 2 e 3 (che sono più probabili per i dadi equilibrati) dal lancio del dado, riduce la probabilità che il dado sia truccato.

c) Calcoliamo la densità congiunta di X e Y.

$$P(X=1,Y=1)=P(T)P(X=1,Y=1|T)+P(E)\,P(X=1,Y=1|E)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{36}\right)=\frac{5}{36}\triangleq p_{X,Y}(1,1)$$

$$P(X=1,Y=j)=P(T)P(X=1,Y=j|T)+P(E)P(X=1,Y=j|E)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{36}\right)=\frac{7}{180}\triangleq p_{X,Y}(1,j)$$
$$j=2,3,4,5,6$$

$$P(X=i,Y=1)=P(T)P(X=i,Y=1|T)+P(E)P(X=i,Y=1|E)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{36}\right)=\frac{7}{180}\triangleq p_{X,Y}(i,1)$$
$$i=2,3,4,5,6$$

$$P(X=i,Y=j)=P(T)P(X=i,Y=j|T)+P(E)P(X=i,Y=j|E)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{36}\right)=\frac{17}{900}\triangleq p_{X,Y}(i,j)$$
$$i=2,3,4,5,6$$
$$j=2,3,4,5,6$$

NOTA- Si osservi che:

$$\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}p_{X,Y}(i,j)=\frac{5}{36}+10\cdot\frac{7}{180}+25\cdot\frac{17}{900}=\frac{5}{36}+\frac{7}{18}+\frac{17}{36}=$$
$$=\frac{5+14+17}{36}=\frac{36}{36}=1$$

come deve essere perché $p_{X,Y}(i,j)$ è una densità di probabilità discreta.

Calcoliamo le densità marginali di X e Y.

La densità marginale di X già la conosciamo, perché ce la siamo calcolata al punto a).

Rifacciamo il calcolo usando la densità congiunta di X e Y:

$$p_X(1) = \sum_{j=1}^{6} p_{X,Y}(1,j) = p_{X,Y}(1,1) + \sum_{j=2}^{6} p_{X,Y}(1,j) = \frac{5}{36} + 5 \cdot \frac{7}{180} = \frac{5}{36} + \frac{7}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$p_X(i) = \sum_{j=1}^{6} p_{X,Y}(i,j) = p_{X,Y}(i,1) + \sum_{j=2}^{6} p_{X,Y}(i,j) = \frac{7}{180} + 5 \cdot \frac{17}{900} = \frac{35+85}{900} = \frac{120}{900} = \frac{2}{15}$$

$\boxed{i = 2,3,4,5,6}$

=> Abbiamo correttamente ottenuto la stessa densità calcolata in precedenza!

Per quanto riguarda la densità marginale di Y:

$$p_Y(1) = \sum_{i=1}^{6} p_{X,Y}(i,1) = p_{X,Y}(1,1) + \sum_{i=2}^{6} p_{X,Y}(i,1) = \frac{5}{36} + 5 \cdot \frac{7}{180} = \frac{1}{3}$$

$$p_Y(j) = \sum_{i=1}^{6} p_{X,Y}(i,j) = p_{X,Y}(1,j) + \sum_{i=2}^{6} p_{X,Y}(i,j) = \frac{7}{180} + 5 \cdot \frac{17}{900} = \frac{2}{15}$$

$\boxed{j = 2,3,4,5,6}$

<u>NOTA</u> - Si osservi che X e Y hanno la stessa densità marginale!

X e Y sono <u>indipendenti</u> se e solo se $p_{X,Y}(i,j) = p_X(i)\, p_Y(j)$ per ogni (i,j).

Tuttavia:

$$p_{X,Y}(1,1) = \frac{5}{36} \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = p_X(1)\, p_Y(1)$$

Dunque, X e Y <u>non</u> sono indipendenti.

<u>NOTA</u> - Dato che i lanci avvengono con un dado del quale non sappiamo se è truccato o meno, il risultato del primo lancio del dado <u>modifica la previsione</u> sul risultato del secondo lancio.

Infatti, supponiamo di aver osservato $X=1$. Allora, per esempio:

$$P(Y=1 \mid X=1) = \frac{P(X=1, Y=1)}{P(X=1)} = \frac{p_{X,Y}(1,1)}{p_X(1)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{1}{3}} = \frac{5}{12} > \frac{1}{3} = P(Y=1).$$

Avendo osservato "1" al primo lancio, sono indotto a ritenere con maggiore probabilità che il dado scelto sia truccato (per i dadi truccati il risultato "1" è più probabile) e quindi aumento la probabilità di ottenere "1" anche al secondo lancio. Si osservi però che <u>non</u> ho comunque la <u>certezza</u> di aver scelto un dado truccato. Infatti $P(Y=1 \mid T) = \frac{1}{2} > \frac{5}{12} = P(Y=1 \mid X=1)$.