Esercizio. Siano $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ due variabili aleatorie scalari aventi densità di probabilità congiunta:

$$f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x,y) = \begin{cases} \alpha e^{-(x+y)} & \text{se } 0 \le x \le \ln 2 \ \text{ e } \ 0 \le y \le \ln 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Determinare il valore di α affinché la $f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x,y)$ sia effettivamente una densità di probabilità.

b) Le variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ sono indipendenti? Perché?

c) Calcolare il valor medio $m_{\boldsymbol{z}}$ e la matrice di covarianza $R_{\boldsymbol{z}}$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{z} = [\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}]^T$.

---

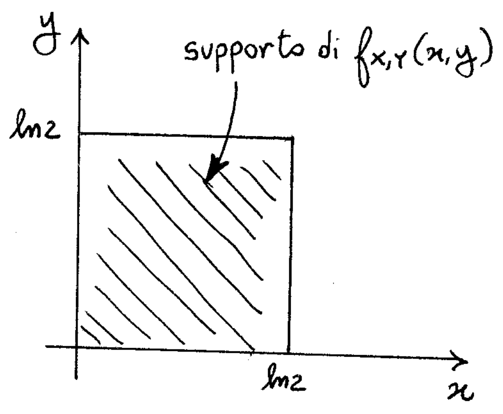
a) Innanzitutto si osservi che, affinche' $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, deve essere $\alpha \geq 0$. Inoltre, affinche' sia una densita':

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\ln 2}\int_0^{\ln 2} \alpha\, e^{-(x+y)}\,dx\,dy =$$

$$= \alpha \left(\int_0^{\ln 2} e^{-x}dx\right)\left(\int_0^{\ln 2} e^{-y}dy\right) = \alpha \left[-e^{-x}\right]_0^{\ln 2}\left[-e^{-y}\right]_0^{\ln 2} = \alpha\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2 = \frac{\alpha}{4}$$

Dunque, affinche' $\frac{\alpha}{4} = 1$, deve essere $\boxed{\alpha = 4}$.

b) Calcoliamo le densita' marginali di X e Y.



- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$

Se $0 \leq x \leq \ln 2$:

$$f_X(x) = \int_0^{\ln 2} 4\, e^{-(x+y)}\,dy = 4e^{-x}\int_0^{\ln 2} e^{-y}\,dy =$$

$$= 4e^{-x}\left[-e^{-y}\right]_0^{\ln 2} = 4e^{-x}\left(-\frac{1}{2}+1\right) = 2e^{-x}$$

Se $x < 0$ oppure $x > \ln 2$:

$$f_X(x) = 0$$

Dunque:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-x} & \text{se } 0 \le x \le \ln 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

Ripetendo calcoli identici a quelli svolti per $f_X(x)$, si ottiene:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-y} & \text{se } 0 \le y \le \ln 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

<u>NOTA</u> - X e Y hanno la stessa densità di probabilità! Dunque avranno lo stesso valore atteso e la stessa varianza.

Per verificare se X e Y sono <u>indipendenti</u>, dobbiamo provare che:

$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tranne al più un insieme di punti di misura nulla

<u>Se $0 \le x \le \ln 2$ e $0 \le y \le \ln 2$:</u>

$$f_{X,Y}(x,y) = 4e^{-(x+y)} = 2e^{-x} \cdot 2e^{-y} = f_X(x) f_Y(y) \quad \checkmark$$

<u>Se $x < 0$ oppure $x > \ln 2$ oppure $y < 0$ oppure $y > \ln 2$:</u>

$f_{X,Y}(x,y) = 0$, e inoltre $f_X(x) = 0$ oppure $f_Y(y) = 0$

Dunque: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = 0$. $\checkmark$

$\Longrightarrow$ <u>X e Y sono indipendenti.</u>

c) Il <u>valore atteso</u> di Z è $E[Z]=(m_X, m_Y)$,
dove $m_X=E[X]$ e $m_Y=E[Y]$.

$$E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx=\int_0^{\ln 2} x\cdot 2e^{-x}\,dx = 2\int_0^{\ln 2} x e^{-x}\,dx =$$

integrando per parti

$$= 2\left\{\left[-xe^{-x}\right]_0^{\ln 2}+\int_0^{\ln 2} e^{-x}\,dx\right\} =$$

$$= 2\left\{-\frac{\ln 2}{2}+\left[-e^{-x}\right]_0^{\ln 2}\right\} = 2\left(-\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{2}+1\right) = 1-\ln 2 \simeq 0.307$$

Analogamente (dato che X e Y hanno la stessa densità di probabilità):

$E[Y]=1-\ln 2$

Dunque:

$$E[Z]=\begin{bmatrix} 1-\ln 2 \\ 1-\ln 2 \end{bmatrix} \triangleq m_Z$$

La <u>matrice di covarianza</u> di Z è $E\left[(Z-m_Z)(Z-m_Z)^T\right]=\begin{bmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var(Y)\end{bmatrix}$.

$Var(X)=E[X^2]-m_X^2$

$$E[X^2]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx=\int_0^{\ln 2} x^2\cdot 2e^{-x}\,dx = 2\int_0^{\ln 2} x^2 e^{-x}\,dx =$$

integrando per parti

$$= 2\left\{\left[-x^2e^{-x}\right]_0^{\ln 2}+\int_0^{\ln 2} 2x e^{-x}\,dx\right\} = 2\left(-\frac{(\ln 2)^2}{2}+1-\ln 2\right)$$

è lo stesso integrale calcolato per $E[X]$!

Dunque:

$$Var(X)=E[X^2]-m_X^2 = -(\ln 2)^2+2-2\ln 2-(1-\ln 2)^2 = 1-2(\ln 2)^2 \simeq 0.039$$

Analogamente (dato che X e Y hanno la stessa densità di probabilità):

$$Var(Y) = 1 - 2(\ln 2)^2$$

Inoltre,

$$Cov(X,Y) = 0$$

perché X e Y sono indipendenti, e quindi anche scorrelate. Dunque:

$$E[(Z-m_Z)(Z-m_Z)^T] = \begin{bmatrix} 1-2(\ln 2)^2 & 0 \\ 0 & 1-2(\ln 2)^2 \end{bmatrix}.$$

NOTA - Come si calcola la covarianza di X e Y?

$$Cov(X,Y) = E[(X-m_X)(Y-m_Y)] = E[XY] - m_X m_Y.$$

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = \int_0^{\ln 2}\int_0^{\ln 2} xy \cdot 4e^{-(x+y)} dx\, dy =$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^{\ln 2} x \cdot 2e^{-x} dx\right)}_{\text{integrale già calcolato per } E[X]} \underbrace{\left(\int_0^{\ln 2} y \cdot 2e^{-y} dy\right)}_{\text{integrale già calcolato per } E[Y]} = m_X m_Y$$

Dunque:

$$Cov(X,Y) = E[XY] - m_X m_Y = m_X m_Y - m_X m_Y = 0.$$