Esercizio. Sia $\boldsymbol{x}$ una variabile aleatoria avente densità di probabilità:

$$f_{\boldsymbol{x}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1) & \text{se } x \in [1,\ 3] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Calcolare il valor medio $\mathbf{E}[\boldsymbol{x}]$ e la varianza $\mathrm{Var}(\boldsymbol{x})$ di $\boldsymbol{x}$.

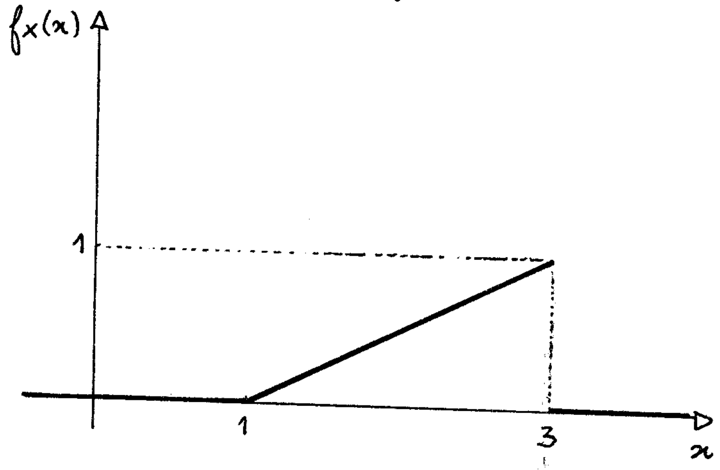
Si consideri, ora, una seconda variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$ uniformemente distribuita nell'intervallo $[0,\ 2]$, e sia $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$. Nell'ipotesi che $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{y}$ siano indipendenti:

b) Calcolare il valor medio $\mathbf{E}[\boldsymbol{z}]$ e la varianza $\mathrm{Var}(\boldsymbol{z})$ di $\boldsymbol{z}$.

1

NOTA- Verifichiamo che f_x è effettivamente una densità di probabilità:

Tracciamo il grafico di $f_x(x)$:



Si osserva che $f_x(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e inoltre:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)\,dx = \int_1^3 \frac{1}{2}(x-1)\,dx = \text{AREA TRIANGOLO} = \frac{\overset{\text{base}}{2}\cdot \overset{\text{altezza}}{1}}{2} = 1$$

a) $$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x)\,dx = \int_1^3 x\cdot\frac{1}{2}(x-1)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^3 (x^2-x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{27}{3}-\frac{9}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{3} \simeq 2{,}33$$

Poniamo $m_x = E[X] = \frac{7}{3}$.

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[(X-m_x)^2\right] = E[X^2] - m_x^2$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x)\,dx = \int_1^3 x^2\cdot\frac{1}{2}(x-1)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^3 (x^3-x^2)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{81}{4}-\frac{27}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right) = \frac{17}{3}$$

Dunque:

$$Var(X) = E[X^2]-m_X^2 = \frac{17}{3}-\left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{17}{3}-\frac{49}{9} = \frac{2}{9}$$

b) La v.a. Y è uniformemente distribuita sull'intervallo $[0,2]$. Dunque:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } y \in [0,2] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e $E[Y] = \frac{2+0}{2} = 1$ e $Var(Y) = \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

RICHIAMI - Se una v.a. Y è uniformemente distribuita sull'intervallo $[a,b]$, allora:

- $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } y \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ - densità di probabilità di Y -
- $E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\,dy = \frac{b+a}{2} \triangleq m_Y$ - valore atteso di Y -
- $Var(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y-m_Y)^2 f_Y(y)\,dy = \frac{(b-a)^2}{12}$ - varianza di Y -

$$E[Z] = E[X+Y] \underset{\text{linearità}}{=} E[X]+E[Y] = \frac{7}{3}+1 = \frac{10}{3}$$

$$Var(Z) = Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y)+2\,\underbrace{Cov(X,Y)}_{=0} =$$

$$= \frac{2}{9}+\frac{1}{3} = \frac{5}{9}$$

perché X e Y sono indipendenti, e quindi anche scorrelate

NOTA - non c'è stato bisogno di calcolare la densità congiunta di X e Y...