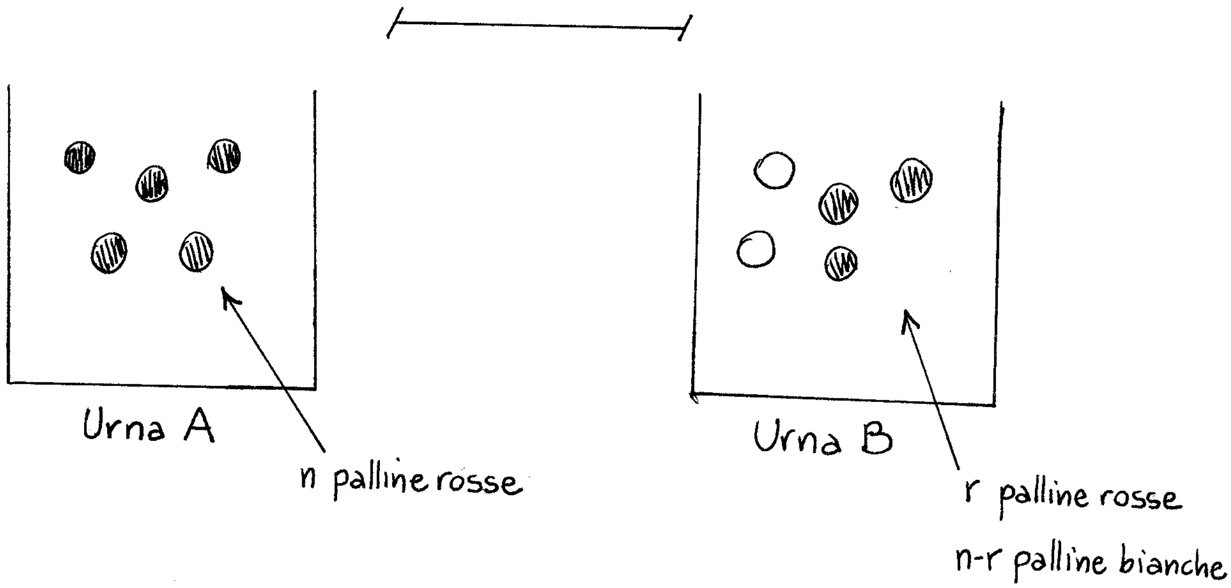
**Esercizio.** Un'urna A contiene $n$ palline tutte rosse. Un'urna B contiene $n$ palline, di cui $r$ rosse e $n-r$ bianche. Si sceglie a caso un'urna e da essa si effettua una successione di estrazioni con rimpiazzo.

*a)* Qual è la probabilità che la prima pallina estratta sia rossa?

*b)* Qual è la probabilità che le prime due palline estratte abbiano colori diversi?

*c)* Quante estrazioni sono necessarie in media per veder comparire per la prima volta una pallina rossa?

*d)* Sapendo che le prime $k$ palline estratte sono rosse, qual è la probabilità che l'urna dalla quale esse sono state estratte sia l'urna A? Si supponga che $n = 12$, $r = 4$. Quanto grande dovrà essere $k$ perché si possa concludere che l'urna da cui le palline sono state estratte sia l'urna A con una probabilità almeno del 90%?




Consideriamo gli eventi:

$A \equiv$ "è stata scelta l'urna A"

$B \equiv$ "è stata scelta l'urna B"

e le variabili aleatorie:

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{se è stata estratta una pallina bianca all'}i\text{-esima estrazione} \\ 1 & \text{se è stata estratta una pallina rossa all'}i\text{-esima estrazione} \end{cases}$$

dove $i = 1, 2, 3 \ldots$

NOTA- Una volta scelta a caso l'urna, tutte le estrazioni sono effettuate da essa.

a) Coincide con il calcolare:

$$P(X_1=1)=P(A)\,P(X_1=1|A)+P(B)\,P(X_1=1|A)= \qquad (*)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{r}{n}\right)=\frac{1}{2}(1+p)$$

se sappiamo che è stata scelta l'urna A, allora la probabilità di estrarre una pallina rossa è 1!

se sappiamo che è stata scelta l'urna B, allora la probabilità di estrarre una pallina rossa è

$$\boxed{p=\frac{r}{n}}$$

<u>NOTA</u>- L'espressione $(*)$ si ottiene applicando la <u>partizione dell'evento certo</u>:

$$P(X_1=1)=P\big(\{X_1=1\}\cap\{A\cup B\}\big)=P\big(\{X_1=1,A\}\cup\{X_1=1,B\}\big)=$$

<u>evento certo</u>: si sceglie l'urna A o l'urna B, non ci sono altre possibilità!

<u>eventi disgiunti</u>: se si sceglie l'urna A, non si sceglie l'urna B, e viceversa...

$$=P(X_1=1,A)+P(X_1=1,A)=P(A)\,P(X_1=1|A)+P(B)\,P(X_1=1|B).$$

passando alle probabilità condizionali

b) Coincide con il calcolare:

$$P(X_1\neq X_2)=P(A)\,P(X_1\neq X_2|A)+P(B)\,P(X_1\neq X_2|B)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot P(X_1\neq X_2|B)$$

se sappiamo che è stata scelta l'urna A, allora la probabilità di estrarre due palline di colori diversi è 0!

da calcolare...

$$P(X_1 \neq X_2 | B) = P\left(\{X_1=1, X_2=0\} \cup \{X_1=0, X_2=1\} | B\right) =$$

elenco tutti i casi...

eventi disgiunti

$$= P(X_1=1, X_2=0 | B) + P(X_1=0, X_2=1 | B) =$$

i risultati di due estrazioni con rimpiazzo sono eventi indipendenti...

$$= P(X_1=1|B)\,P(X_2=0|B) + P(X_1=0|B)\,P(X_2=1|B) =$$

$$= \frac{r}{n} \cdot \frac{n-r}{n} + \frac{n-r}{n} \cdot \frac{r}{n} = 2\,\frac{r}{n}\left(1-\frac{r}{n}\right) = 2p(1-p)$$

Quindi:

$$P(X_1 \neq X_2) = \frac{1}{2} P(X_1 \neq X_2 | B) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}p(1-p) = p(1-p)$$

c) Definiamo la v.a.:

$Y \equiv$ prima estrazione in cui il risultato è una pallina rossa

La v.a. $Y$ può assumere i valori $k = 1, 2, 3, \ldots$

Ci interessa calcolare $E[Y]$, ma prima si deve calcolare la <u>densità discreta di probabilità</u> di $Y$, cioè:

$$p_Y(k) = P(Y=k) \quad \text{per ogni } k = 1, 2, 3, \ldots$$

<u>caso 1: $k=1$</u>

$$p_Y(1) = P(Y=1) = P(X_1=1) = \frac{1}{2}(1+p)$$

già calcolata al punto a)

<u>caso 2: $k = 2, 3, \ldots$</u>

$$p_Y(k) = P(Y=k) = P(\underbrace{X_1=0, \ldots, X_{k-1}=0}_{k-1 \text{ insuccessi}}, \underbrace{X_k=1}_{\substack{\text{successo} \\ \text{alla } k\text{-esima} \\ \text{estrazione}}}) =$$

$$= P(A)P(X_1=0,\dots,X_{k-1}=0,X_k=1\,|\,A)+P(B)P(X_1=0,\dots,X_{k-1}=0,X_k=1\,|\,B)=$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot P(X_1=0|B)\dots P(X_{k-1}=0|B)P(X_k=1|B) =$$

se sappiamo che è stata scelta l'urna A, allora la probabilità di un insuccesso (pallina estratta non rossa) è 0!

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\frac{n-r}{n}\cdot\ \dots\ \cdot\frac{n-r}{n}}_{k-1 \text{ volte}}\cdot\frac{r}{n} = \frac{1}{2}\frac{r}{n}\left(1-\frac{r}{n}\right)^{k-1} = \frac{1}{2}p(1-p)^{k-1}$$

DUNQUE:

$$p_Y(k) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+p) & \text{se } k=1 \\ \frac{1}{2}p(1-p)^{k-1} & \text{se } k=2,3,\dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

NOTA - Verifichiamo che $p_Y(k)$ è effettivamente una densità discreta di probabilità.

Innanzi tutto, $p_Y(k) \in [0,1]$ $\forall k=1,2,3,\dots$ perché sono delle probabilità.

Inoltre:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_Y(k) = p_Y(1) + \sum_{k=2}^{\infty} p_Y(k) = \frac{1}{2}(1+p) + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2}p(1-p)^{k-1} =$$

$$= \frac{1}{2}(1+p) + \frac{1}{2}\frac{p}{1-p}\sum_{k=2}^{\infty}(1-p)^k$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{se } |x|<1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k - (1-p)^0 - (1-p)^1 =$$

$$= \frac{1}{1-(1-p)} - 1 - 1 + p = \frac{1}{p} + p - 2 = \frac{p^2-2p+1}{p} = \frac{(1-p)^2}{p}$$

Per cui:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_Y(k) = \frac{1}{2}(1+p) + \frac{1}{2}\,\frac{\cancel{p}}{\cancel{1-p}}\,\frac{(1-p)^{\cancel{2}}}{\cancel{p}} = \frac{1}{2}(1+p) + \frac{1}{2}(1-p) = 1.$$

Per il calcolo del valore atteso di Y:

$$E[Y] = \sum_{k=1}^{\infty} k\,p_Y(k) = p_Y(1) + \sum_{k=2}^{\infty} k\,p_Y(k) = \frac{1}{2}(1+p) + \sum_{k=2}^{\infty} k\cdot\frac{1}{2}p(1-p)^{k-1} =$$

$$= \frac{1}{2}(1+p) + \frac{1}{2}\,\frac{p}{1-p}\sum_{k=2}^{\infty} k(1-p)^k$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{se } |x|<1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^k - 1\cdot(1-p)^1 = \frac{1-p}{(1-(1-p))^2} - (1-p) = \frac{\phantom{1-p}}{p^2} - (1-p) =$$

$$= (1-p)\left(\frac{1}{p^2} - 1\right) = (1-p)\,\frac{1-p^2}{p^2} = \frac{(1-p)^2(1+p)}{p^2}$$

DUNQUE:

$$E[Y] = \frac{1}{2}(1+p) + \frac{1}{2}\,\frac{\cancel{p}}{\cancel{1-p}}\,\frac{(1-p)^{\cancel{2}}(1+p)}{p^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2}(1+p)\left(1 + \frac{1-p}{p}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(1+p)\frac{1}{p} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

d) Coincide con il calcolare:

$$P(A \mid X_1=1, \dots, X_k=1) = \frac{P(A)\,P(X_1=1,\dots,X_k=1 \mid A)}{P(A)P(X_1=1,\dots,X_k=1 \mid A) + P(B)P(X_1=1,\dots,X_k=1 \mid B)} =$$

Teorema di Bayes

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{r}{n}\right)^k} = \frac{1}{1+p^k}$$

Se $n=12$ e $r=4$, allora $p = \frac{r}{n} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Si deve determinare il minimo $k$ tale che:

$$\frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^k} \geq 0.9 = \frac{9}{10} \iff 1+\left(\frac{1}{3}\right)^k \leq \frac{10}{9} \iff \left(\frac{1}{3}\right)^k \leq \frac{10}{9}-1 = \frac{1}{9}$$ 6

Dunque $\boxed{k=2}$.