Esercizi di
Calcolo delle Probabilità

Versione del 18/05/2005

Corso di Statistica

Anno Accademico 2004/05

Antonio Giannitrapani, Simone Paoletti

Calcolo delle probabilità

Esercizio 1. Un dado viene lanciato 3 volte. Qual è la probabilità p di ottenere 6 almeno una volta? Quante volte deve essere lanciato il dado perché la probabilità di ottenere 6 almeno una volta sia maggiore o uguale al 90%?

Esercizio 2. Due numeri vengono estratti, senza rimpiazzo, da un'urna contenente dieci palline numerate da 1 a 10. Qual è la probabilità che i due numeri estratti siano consecutivi?

Esercizio 3. Le chiavi di un mazzo che ne contiene n vengono provate una dopo l'altra fino a trovare quella giusta. Naturalmente le chiavi già provate vengono messe da parte. Qual è la probabilità che la chiave giusta venga trovata al k-esimo tentativo?

Esercizio 4. Un'urna contiene due carte: una di esse ha entrambi i lati neri, mentre l'altra ha un lato nero ed uno bianco. Una carta viene estratta e se ne guarda uno dei lati: è nero. Qual è la probabilità che anche il secondo lato sia nero?

Esercizio 5. Tre urne contengono 10 palline ciascuna. Le palline nell'urna A sono contrassegnate con i numeri che vanno dall'1 al 10, quelle nell'urna B con i numeri che vanno dal 4 al 13, mentre quelle nell'urna C sono numerate da 6 a 15. Si sceglie un'urna a caso (tra di loro equiprobabili) e si estrae una pallina. Sia $\boldsymbol{x}$ la variabile aleatoria discreta corrispondente al numero stampato sulla pallina estratta.

a) Calcolare $\mathrm{P}(\boldsymbol{x} = 10)$, cioè la probabilità che il numero estratto sia 10.

b) Calcolare $\mathrm{P}(11 \leq \boldsymbol{x} \leq 13)$, cioè la probabilità che il numero estratto sia compreso tra 11 e 13.

c) Calcolare la probabilità che si sia scelta l'urna A, sapendo che l'esito dell'estrazione è stato $\boldsymbol{x} = 5$.

Esercizio 6. Si consideri l'esperimento consistente nel lancio contemporaneo di due dadi. Uno di essi è un dado non truccato, ovvero ciascuna faccia ha la stessa probabilità di manifestarsi. L'altro dado, invece, è truccato e la probabilità $\mathrm{P}(i)$ associata all'esito della faccia i-esima vale:

$$\mathrm{P}(i) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{se } i = 1, \ldots, 5 \\ \frac{1}{2} & \text{se } i = 6. \end{cases}$$

a) Calcolare la probabilità che la somma dei numeri risultanti dall'esperimento sia pari a 10.

b) Si considerino n ripetizioni indipendenti dell'esperimento precedente e sia $\boldsymbol{x}$ una variabile aleatoria corrispondente al numero di volte che il lancio ha dato esito pari a 10. Scrivere l'espressione della densità di probabilità $f_{\boldsymbol{x}}(x)$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{x}$.

c) Scelto uno dei due dadi a caso e lanciato, calcolare la probabilità che esso sia il dado truccato noto che l'esito del lancio è stato 6.

Esercizio 7. Da un'urna contenente 6 palline numerate da 1 a 6, se ne estraggono 2 *con rimpiazzo*. Indicando con $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$ rispettivamente i risultati delle due estrazioni, si calcoli la densità di probabilità congiunta $f_{\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2}}(x_1, x_2)$ e le densità di probabilità marginali $f_{\boldsymbol{x_1}}(x_1)$, $f_{\boldsymbol{x_1}}(x_1)$ di $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$. Si ripeta l'esercizio nel caso in cui le due estrazioni avvengano *senza rimpiazzo*. In quale dei due casi le variabili aleatorie $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$ sono indipendenti?

Esercizio 8. Una moneta ed un dado vengono lanciati insieme ripetutamente. Qual è la probabilità che la moneta dia testa prima che il dado dia 6?

Esercizio 9. In un mobile ci sono due cassetti. Il primo contiene un mazzo di carte con:

- 6 carte di cuori;
- 5 carte di picche;
- 4 carte di quadri.

Il secondo contiene un mazzo di carte con:

- 8 carte di cuori;
- 5 carte di fiori;
- 2 carte di picche.

Scelto a caso uno dei due cassetti, si estrae una carta dal mazzo corrispondente. Definite le variabili aleatorie:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se è stato scelto il primo cassetto} \\ 2 & \text{se è stato scelto il secondo cassetto,} \end{cases}$$
$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se è stata estratta una carta di cuori} \\ 2 & \text{se è stata estratta una carta di fiori} \\ 3 & \text{se è stata estratta una carta di picche} \\ 4 & \text{se è stata estratta una carta di quadri,} \end{cases}$$

e noto che $P(X = 1) = 1/3$ e $P(X = 2) = 2/3$, calcolare:

a) le probabilità degli eventi $(X = i, Y = j)$ per $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3, 4$;

b) la funzione massa di probabilità $P(Y = j)$ per $j = 1, 2, 3, 4$;

c) le probabilità a posteriori $P(X = i \,|\, Y = j)$ per $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3, 4$.

Spiegare perché $P(X = 1) > P(X = 1|Y = 1)$, mentre $P(X = 2) < P(X = 2|Y = 1)$. Calcolare infine la probabilità di estrarre una carta con seme rosso (cuori o quadri).

Esercizio 10. Si consideri un dado a sei facce: su tre facce è impresso il numero 1; su due facce il numero 3 e su una faccia il numero 6. Si definisca la variabile aleatoria discreta $\boldsymbol{x}$ corrispondente al numero ottenuto da un lancio del dado.

a) Determinare la funzione massa di probabilità $p_i = P\{\boldsymbol{x} = x_i\}$.

b) Determinare il valore atteso $m_{\boldsymbol{x}} = E[\boldsymbol{x}]$ e la varianza $E[(\boldsymbol{x} - m_{\boldsymbol{x}})^2]$ di un singolo lancio.

Si consideri ora la variabile aleatoria $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ corrispondente alla somma dei punteggi ottenuti dal lancio di due dadi $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$, con le stesse caratteristiche del dado precedente.

c) Determinare la funzione massa di probabilità $q_i = P\{\boldsymbol{z} = z_i\}$.

d) Calcolare la probabilità che $\boldsymbol{z}$ sia maggiore di 8, ovvero $P\{\boldsymbol{z} > 8\}$.

e) Calcolare la probabilità che $\boldsymbol{z}$ sia maggiore di 8, sapendo che almeno uno dei due dadi ha dato come esito il numero 3, ovvero $P\{\boldsymbol{z} > 8 \mid \boldsymbol{x}_1 = 3 \text{ oppure } \boldsymbol{x}_2 = 3\}$.

Esercizio 11. In una scatola nera sono contenuti due mazzi di carte. Il primo mazzo contiene 3 carte con i numeri 1, 3 e 4. Il secondo mazzo contiene 4 carte con i numeri 1, 2, 3 e 5. Senza guardare, un bambino sceglie in maniera equiprobabile un mazzo dalla scatola, ed estrae una carta dal mazzo. Sia $\boldsymbol{x}$ la variabile aleatoria discreta corrispondente al numero della carta estratta.

a) Determinare la funzione di densità di probabilità $f_{\boldsymbol{x}}(x)$.

b) Determinare il valor medio $m_{\boldsymbol{x}}$.

c) Noto che l'esito dell'estrazione della carta ha dato $\boldsymbol{x} = 1$, calcolare la probabilità *a posteriori* di aver scelto il primo mazzo. Confrontare questo valore con la probabilità *a priori*, e spiegare intuitivamente il risultato.

Esercizio 12. Due monete vengono lanciate più volte fino a che *entrambe* abbiano ottenuto almeno una volta testa. Qual è la probabilità che occorrano k lanci?
Suggerimento: indicando con $\boldsymbol{s}$ e $\boldsymbol{t}$ il numero di lanci necessari perché la prima e la seconda moneta rispettivamente diano testa, occorre calcolare la densità della v.a. $\max(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$.

Esercizio 13. Due monete vengono lanciate più volte fino a che *almeno una* delle monete dia testa. Qual è la probabilità che occorrano k lanci?

Esercizio 14. Si consideri un esperimento che consiste nel lancio di due monete non truccate. Siano $\boldsymbol{x}_i$, $i \in \{1, 2\}$, due variabili aleatorie discrete che assumono i seguenti valori:

$$\boldsymbol{x}_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'esito del lancio della moneta } i\text{-esima è testa} \\ 0 & \text{se l'esito del lancio della moneta } i\text{-esima è croce} \end{cases}$$

a) Per ciascuno dei seguenti eventi:

1. $A = \{(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2) = (1, 1)\}$
2. $B = \{(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2) = (1, 1) \mid \boldsymbol{x}_1 = 1\}$
3. $C = \{(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2) = (1, 1) \mid (\boldsymbol{x}_1 = 1) \cup (\boldsymbol{x}_2 = 1)\}$

descrivere brevemente il significato e calcolare la probabilità con cui si verifica.

Esercizio 15. Un'urna contiene 112 dadi di cui la metà sono equilibrati, mentre gli altri sono stati manipolati in modo che, per ciascuno di essi, la probabilità di ottenere 1 sia pari a $\frac{1}{2}$, mentre ogni altro risultato si verifica con probabilità $\frac{1}{10}$.

a) Un dado viene estratto a caso e lanciato. Indicando con $\boldsymbol{x}$ il risultato del lancio, si calcoli la probabilità di ottenere 3 ed il valor medio $\mathbf{E}[\boldsymbol{x}]$ di $\boldsymbol{x}$.

b) Un dado viene estratto a caso e lanciato due volte ottenendo 2 e 3. Qual è la probabilità che si tratti di uno dei dadi truccati?

c) Un dado viene estratto a caso e lanciato due volte. Si indichi con $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{y}$ il risultato dei due lanci. Si tratta di v.a. indipendenti?

Esercizio 16. In un'urna sono contenute dieci palline: su sei di queste è stampato il numero 1, su tre il numero 2 e su una il numero 4. Si consideri la variabile aleatoria discreta $\boldsymbol{x}$ corrispondente al numero ottenuto da un'estrazione casuale di una pallina.

a) Determinare la funzione massa di probabilità $p_i = P\{\boldsymbol{x} = x_i\}$.

b) Determinare il valore atteso $m_{\boldsymbol{x}} = E[\boldsymbol{x}]$ e la varianza $E[(\boldsymbol{x} - m_{\boldsymbol{x}})^2]$ di una singola estrazione.

c) Ripetere i punti *a*) e *b*) relativamente alla variabile aleatoria $\boldsymbol{z}$, corrispondente al numero totale ottenuto dall'estrazione di due palline.

d) Supponendo che l'estrazione di due palline abbia dato come esito $\boldsymbol{z} = 6$, determinare la probabilità che l'estrazione di una terza pallina dia esito pari a 2, condizionata all'evento $\boldsymbol{z} = 6$. Determinare inoltre la densità di probabilità condizionata $f_{\boldsymbol{x}_3|\boldsymbol{z}}(x_3|\boldsymbol{z} = 6)$ e il corrispondente valore atteso condizionato $E[\boldsymbol{x}_3|\boldsymbol{z} = 6]$.

Esercizio 17. Un'urna A contiene n palline tutte rosse. Un'urna B contiene n palline, di cui r rosse e $n - r$ bianche. Si sceglie a caso un'urna e da essa si effettua una successione di estrazioni con rimpiazzo.

a) Qual è la probabilità che la prima pallina estratta sia rossa?

b) Qual è la probabilità che le prime due palline estratte abbiano colori diversi?

c) Quante estrazioni sono necessarie in media per veder comparire per la prima volta una pallina rossa?

d) Sapendo che le prime k palline estratte sono rosse, qual è la probabilità che l'urna dalla quale esse sono state estratte sia l'urna A? Si supponga che $n = 12,\ r = 4$. Quanto grande dovrà essere k perché si possa concludere che l'urna da cui le palline sono state estratte sia l'urna A con una probabilità almeno del 90%?

Esercizio 18. Tre urne contengono 30 palline ciascuna. Nell'urna A si trovano 10 palline contrassegnate col numero 1 e 20 col numero 2, nell'urna B si trovano 15 palline col numero 2 e 15 col numero 3, mentre nell'urna C si trovano 15 palline col numero 1 e 15 col numero 3. Si sceglie un'urna a caso (tra di loro equiprobabili) e si estrae una pallina. Sia $\boldsymbol{x}$ la variabile aleatoria discreta corrispondente al numero stampato sulla pallina estratta.

a) Calcolare $\mathrm{P}(\boldsymbol{x}=1)$, cioè la probabilità che il numero estratto sia 1.

b) Calcolare il valor medio $m_{\boldsymbol{x}}$ di $\boldsymbol{x}$.

c) Calcolare la probabilità che si sia scelta l'urna A, sapendo che l'esito dell'estrazione è stato $\boldsymbol{x}=1$.

Esercizio 19. In un'urna sono contenute dieci palline numerate da 1 a 10. Vengono effettuate due estrazioni senza rimpiazzo. Si considerino le variabili aleatorie:

$$\boldsymbol{x}_i = \{\text{numero della pallina estratta all' } i\text{-esima estrazione}\}, \quad i = 1, 2.$$

a) Determinare le probabilità degli eventi $\{\boldsymbol{x}_1 = i, \boldsymbol{x}_2 = j\}$, per $i, j = 1, \ldots, 10$.

b) Determinare la probabilità dell'evento $\{\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = 5\}$.

c) Determinare la probabilità dell'evento $\{\boldsymbol{x}_2 \text{ è pari}\}$. C'è differenza con la probabilità dell'evento $\{\boldsymbol{x}_1 \text{ è pari}\}$?

d) Determinare la probabilità dell'evento $\{\boldsymbol{x}_2 = 9\}$, sapendo che la prima estrazione ha dato un esito maggiore di 5 (ovvero $\boldsymbol{x}_1 > 5$).

Esercizio 20. Si consideri la funzione:

$$f_{\boldsymbol{x}}(x) = \begin{cases} \gamma^2 - \frac{16}{9}x^2 & \text{se } -\frac{3}{4}\gamma \le x < \frac{3}{4}\gamma \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

in cui γ è un numero reale positivo.

a) Determinare il valore di γ per cui $f_{\boldsymbol{x}}(x)$ rappresenta effettivamente una funzione di densità di probabilità.

b) Sia $\boldsymbol{x}$ una variabile aleatoria con densità di probabilità $f_{\boldsymbol{x}}(x)$. Calcolare il valor medio $m_{\boldsymbol{x}}$ e la varianza $\sigma^2_{\boldsymbol{x}}$ di $\boldsymbol{x}$.

Esercizio 21. Si consideri la funzione:

$$f_{\boldsymbol{x}}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha^2}(x-\alpha) & \text{se } 0 \le x < \alpha \\ -\frac{1}{\alpha^2}(x-2\alpha) & \text{se } \alpha \le x < 2\alpha \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Mostrare che per ogni $\alpha > 0$, $f_{\boldsymbol{x}}(x)$ rappresenta una funzione di densità di probabilità.

b) Sia $\boldsymbol{x}$ una variabile aleatoria con densità di probabilità $f_{\boldsymbol{x}}(x)$. Calcolare il valor medio $m_{\boldsymbol{x}}$ e la varianza $\sigma^2_{\boldsymbol{x}}$ di $\boldsymbol{x}$ nel caso in cui $\alpha = 2$.

Esercizio 22. Dopo aver verificato che la funzione:

$$f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{6}{7}(x+y)^2 & 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

sia effettivamente una densità di probabilità congiunta, si calcoli il valor medio e la matrice di covarianza del vettore $[\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}]^T$.

Esercizio 23. Sia $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \boldsymbol{x}_3]^T$ una v.a. in $\mathbb{R}^3$, con densità di probabilità:

$$f_{\boldsymbol{x}}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{3}{2}x_2^2 + x_3^3 & \text{se } 0 \le x_i \le 1, \ i = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dopo aver verificato che $f_{\boldsymbol{x}}(x_1, x_2, x_3)$ rappresenta una d.d.p., si calcoli il valor medio e la matrice di covarianza di $\boldsymbol{x}$.

Esercizio 24. Siano $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ due variabili aleatorie scalari aventi densità di probabilità congiunta:

$$f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x, y) = \begin{cases} \alpha e^{-(x+y)} & \text{se } 0 \le x \le \ln 2 \ \text{ e } \ 0 \le y \le \ln 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Determinare il valore di α affinché la $f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x, y)$ sia effettivamente una densità di probabilità.

b) Le variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ sono indipendenti? Perché?

c) Calcolare il valor medio $m_{\boldsymbol{z}}$ e la matrice di covarianza $R_{\boldsymbol{z}}$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{z} = [\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}]^T$.

Esercizio 25. Si consideri una v.a. $\boldsymbol{x}$ uniformemente distribuita nell'intervallo $[5, 10]$. Calcolare la densità di probabilità della v.a. $\boldsymbol{y} = \frac{1}{\boldsymbol{x}}$.

Esercizio 26. Sia $\boldsymbol{x}$ una variabile aleatoria avente densità di probabilità:

$$f_{\boldsymbol{x}}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(x-1) & \text{se } x \in [1,\ 3] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Calcolare il valor medio $\mathbf{E}[\boldsymbol{x}]$ e la varianza $\mathrm{Var}(\boldsymbol{x})$ di $\boldsymbol{x}$.

Si consideri, ora, una seconda variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$ uniformemente distribuita nell'intervallo $[0,\ 2]$, e sia $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$. Nell'ipotesi che $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{y}$ siano indipendenti:

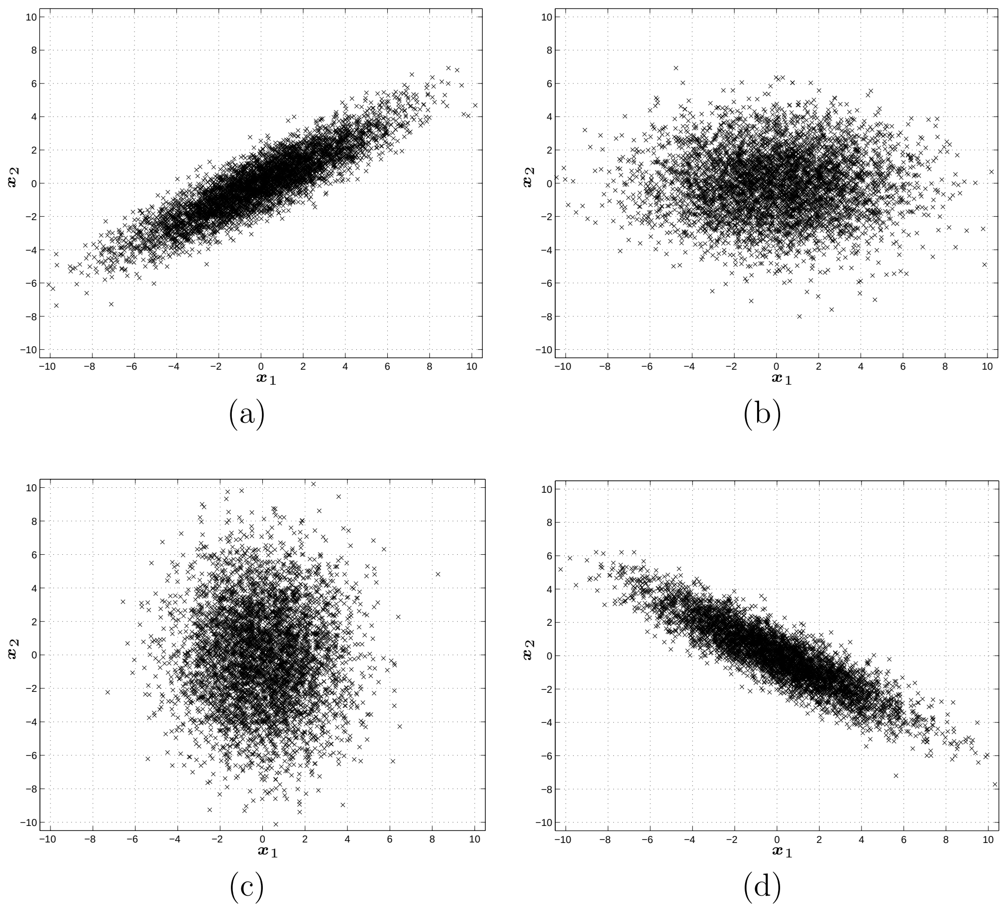

Figura 1

b) Calcolare il valor medio $\mathbf{E}[\boldsymbol{z}]$ e la varianza $\mathrm{Var}(\boldsymbol{z})$ di $\boldsymbol{z}$.

Esercizio 27. Siano $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ due v.a. aventi densità di probabilità $f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x, y)$. Calcolare la densità di probabilità della v.a. $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$.

Esercizio 28. Sia $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_1 \ \boldsymbol{x}_2]^T$ una variabile aleatoria (vettoriale) Gaussiana, a media nulla. Di seguito sono riportate quattro possibili matrici di covarianza della v.a. $\boldsymbol{x}$:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 9 & 5.4 \\ 5.4 & 4 \end{bmatrix}, \quad R_3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad R_4 = \begin{bmatrix} 9 & -5.4 \\ -5.4 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) Per ciascuna matrice R_i, $i = 1, \ldots, 4$, dire se le v.a. $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$ sono indipendenti o meno. Giustificare la risposta.

b) In Figura 1 sono riportate 5000 realizzazioni della v.a. $\boldsymbol{x}$, generate in corrispondenza di ciascuna matrice di covarianza R_i, $i = 1, \ldots, 4$. Associare ciascun grafico $(a), \ldots, (d)$ alla corrispondente matrice di covarianza R_i. Giustificare la risposta.