ESAME DI STATISTICA 29.09.2005

Candidato: **N. Matricola:**

Esercizio 1.

M urne sono inizialmente vuote. Una dopo l'altra, n palline vengono introdotte a caso in una delle urne.

a) Qual è la probabilità che la i-esima urna rimanga vuota?

b) Qual è la probabilità che tutte le urne tranne la j-esima rimangano vuote?

c) Qual è il valore atteso del numero di palline in ciascuna urna? Giustificare la risposta.

d) Calcolare la probabilità che nella i-esima urna ci siano x palline ($x > 0$), noto che essa non è vuota.

Esercizio 2.

Siano $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ due variabili aleatorie la cui densità di probabilità congiunta è uniforme sull'insieme

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^a \leq x \leq e^b,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}, \quad \text{dove } 0 < a < b.$$

a) Scrivere l'espressione della densità di probabilità congiunta $f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x, y)$ delle variabili aleatorie $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.
Suggerimento. Essendo $f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x, y)$ uniforme su D, si ha che

$$f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x, y) = \begin{cases} c & \text{se } (x, y) \in D \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si deve dunque calcolare il valore della costante c...

b) Calcolare le densità di probabilità marginali $f_{\mathbf{X}}(x)$ e $f_{\mathbf{Y}}(y)$ delle variabili aleatorie $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.

c) Stabilire se le variabili aleatorie $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ sono indipendenti.

d) Calcolare la covarianza $\mathrm{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ delle variabili aleatorie $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.

e) Calcolare la probabilità $\mathrm{P}(A)$ dell'evento $A = \left\{ \mathbf{Y} \leq \dfrac{e^{-b}}{e^b - e^a}(\mathbf{X} - e^a) \right\}$.

Esercizio 3.

Si consideri una variabile aleatoria $\mathbf{X}$ con densità di probabilità uniforme sull'intervallo $(0, 1)$.

a) Calcolare la densità di probabilità della variabile aleatoria $\mathbf{Y} = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - \mathbf{X})$, con $\lambda > 0$. E' una densità nota? Specificare il valore atteso $\mathrm{E}[\mathbf{Y}]$ e la varianza $\mathrm{Var}(\mathbf{Y})$.
Nota. Con la notazione log si indica la funzione *logaritmo naturale*.

b) Dimostrare che $\mathrm{P}(\mathbf{Y} > t + s \,|\, \mathbf{Y} > t) = \mathrm{P}(\mathbf{Y} > s)$, con $t, s > 0$.

Soluzioni

Esercizio 1

Definiamo le variabili aleatorie:

Z_i = numero di palline nell'urna i-esima, $i = 1, .., M$.

La densità di probabilità (d.d.p.) discreta di Z_i si deduce facilmente riconoscendo uno schema successo-insuccesso in cui il "successo" in una singola prova è rappresentato dall'introduzione della pallina nell'urna i-esima. La probabilità di successo in una singola prova è $p = \frac{1}{M}$. La d.d.p. di Z_i è dunque una binomiale $B(n,p)$:

$$p_{Z_i}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, .., n.$$

a) $P(i\text{-esima urna vuota}) = p_{Z_i}(0) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = (1-p)^n = \left(1 - \frac{1}{M}\right)^n$

b) $P(\text{tutte le urne tranne la } j\text{-esima vuote}) =$

$= P(j\text{-esima urna contiene } n \text{ palline}) = p_{Z_j}(n) = \binom{n}{n} p^n (1-p)^0 = p^n = \left(\frac{1}{M}\right)^n$

c) $E[Z_i] = np = \frac{n}{M}$

valore atteso di una legge $B(n,p)$

d) Definiamo gli eventi:

A = nella i-esima urna ci sono x palline $(x \neq 0)$

B = la i-esima urna non è vuota

Dobbiamo dunque calcolare $P(A|B)$.

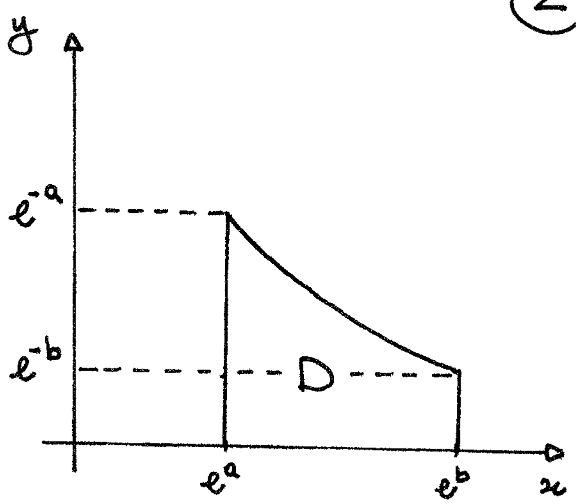
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} =$$

NOTA - $A \cap B = A$ perché $B \subset A$ (se nella i-esima urna ci sono x palline, con $x \neq 0$, allora l'i-esima urna <u>non</u> è vuota!)

$$= \frac{P(A)}{1 - P(B^c)} = \frac{p_{Z_i}(x)}{1 - p_{Z_i}(0)} = \frac{\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}}{1 - (1-p)^n}$$

NOTA - B^c (evento complementare di B) = la i-esima urna è vuota

Esercizio 2



a) $1 = \int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy =$

$$= \int_D c\,dx\,dy =$$

$$= \int_{e^a}^{e^b}\int_0^{\frac{1}{x}} c\,dx\,dy =$$

$$= c\int_{e^a}^{e^b}\left[\int_0^{\frac{1}{x}} dy\right]dx = c\int_{e^a}^{e^b}\left[y\right]_0^{\frac{1}{x}}dx = c\int_{e^a}^{e^b}\frac{dx}{x} =$$

$$= c\left[\log x\right]_{e^a}^{e^b} = c\,(b-a) \implies c(b-a)=1 \implies c=\frac{1}{b-a}$$

Quindi:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } (x,y)\in D \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

b) Se $x<e^a$ oppure $x>e^b$, si ha $f_X(x)=0$. Se $e^a\le x\le e^b$:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{b-a}\,dy = \frac{1}{b-a}\left[y\right]_0^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{(b-a)x}$$

Dunque:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)x} & \text{se } e^a\le x\le e^b \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Se $y<0$ oppure $y>e^{-a}$, si ha $f_Y(y)=0$. Se $0\le y<e^{-b}$:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_{e^a}^{e^b}\frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\left[x\right]_{e^a}^{e^b} = \frac{e^b-e^a}{b-a}$$

Se $e^{-b} \leq y \leq e^{-a}$:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_{e^a}^{\frac{1}{y}} \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\left[x\right]_{e^a}^{\frac{1}{y}} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{y} - e^a\right)$$

Dunque:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{e^b - e^a}{b-a} & \text{se } 0 \leq y < e^{-b} \\ \dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{y} - e^a\right) & \text{se } e^{-b} \leq y \leq e^{-a} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

c) Le variabili aleatorie X e Y <u>non</u> sono indipendenti, in quanto $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$ su un insieme di misura non nulla.

d) $$m_X = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{e^a}^{e^b} \cancel{x} \frac{1}{(b-a)\cancel{x}}\,dx = \frac{1}{b-a}\left[x\right]_{e^a}^{e^b} = \frac{e^b - e^a}{b-a}$$

$$m_Y = E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy = \int_0^{e^{-b}} y \frac{e^b - a^a}{b-a}\,dy + \int_{e^{-b}}^{e^{-a}} y \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{y} - e^a\right)dy =$$

$$= \frac{e^b - a^a}{b-a}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{e^{-b}} + \frac{1}{b-a}\left[y - e^a \frac{y^2}{2}\right]_{e^{-b}}^{e^{-a}} =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{e^{-b}}{2} - \cancel{\frac{e^{a-2b}}{2}} + e^{-a} - \frac{e^{-a}}{2} - e^{-b} + \cancel{\frac{e^{a-2b}}{2}}\right) = \frac{e^{-a} - e^{-b}}{2(b-a)}$$

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_{e^a}^{e^b}\int_0^{\frac{1}{x}} xy \cdot \frac{1}{b-a}\,dx\,dy =$$

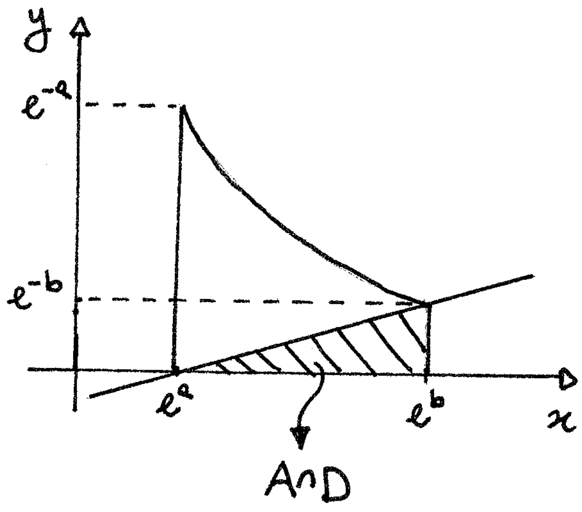
$$= \frac{1}{b-a}\int_{e^a}^{e^b} x \left[\int_0^{\frac{1}{x}} y\,dy\right] dx = \frac{1}{b-a}\int_{e^a}^{e^b} x \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{x}} dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_{e^a}^{e^b} \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2(b-a)}\left[\log x\right]_{e^a}^{e^b} = \frac{1}{2\cancel{(b-a)}}\cancel{(b-a)} = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[XY] - m_X m_Y = \frac{1}{2} - \frac{e^{b}-e^{a}}{b-a} \cdot \frac{e^{-a}-e^{-b}}{2(b-a)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2 - e^{b-a} - e^{a-b}}{(b-a)^2}\right]$$

e) $$P(A) = \int_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy =$$



$$= \int_{A\cap D} \frac{1}{b-a}\,dx\,dy =$$

$$= \int_{e^a}^{e^b} \int_0^{\frac{e^{-b}}{e^b-e^a}(x-e^a)} \frac{1}{b-a}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_{e^a}^{e^b} \Big[\, y \,\Big]_0^{\frac{e^{-b}}{e^b-e^a}(x-e^a)} dx =$$

$$= \frac{e^{-b}}{(b-a)(e^b-e^a)} \int_{e^a}^{e^b} (x-e^a)\,dx =$$

$$= \frac{e^{-b}}{(b-a)(e^b-e^a)} \left[\frac{x^2}{2} - e^a x\right]_{e^a}^{e^b} =$$

$$= \frac{e^{-b}}{(b-a)(e^b-e^a)} \left(\frac{e^{2b}}{2} - e^{a+b} - \frac{e^{2a}}{2} + e^{2a}\right) =$$

$$= \frac{e^{-b}}{(b-a)\cancel{(e^b-e^a)}} (e^b-e^a)^{\cancel{2}} = \frac{1-e^{a-b}}{2(b-a)}.$$

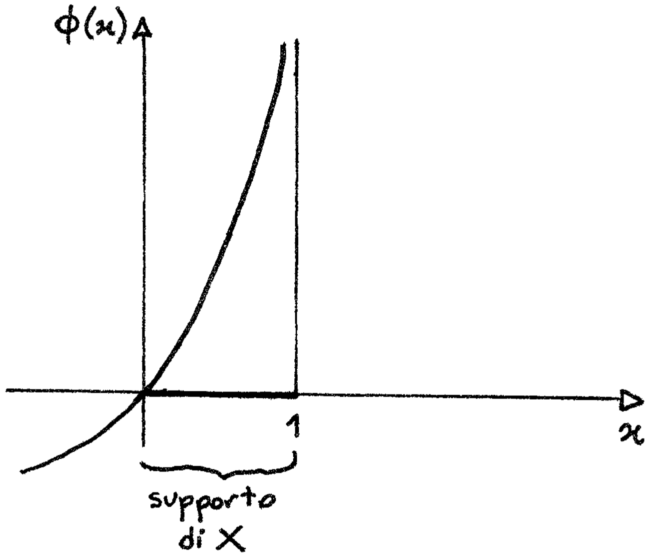
Esercizio 3

a) $Y = \phi(X)$ dove $\phi(x) = -\frac{1}{\lambda}\log(1-x)$.

Inoltre:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è la d.d.p. di X.



- $\phi'(x) = -\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{1-x} \cdot (-1) =$

$$= \frac{1}{\lambda(1-x)}$$

- $y = -\frac{1}{\lambda}\log(1-x) \Rightarrow e^{-\lambda y} = 1-x \Rightarrow x = 1-e^{-\lambda y}$

$\Rightarrow \phi^{-1}(y) = 1 - e^{-\lambda y}$

- La d.d.p. di Y si ottiene dalla formula:

$$f_Y(y) = \left. \frac{f_X(x)}{|\phi'(x)|} \right|_{x=\phi^{-1}(y)}$$

Da cui:

- $f_Y(y) = 0$ se $y \leq 0$ (perché se $y \leq 0$, allora $\phi^{-1}(y) \leq 0$)

- $f_Y(y) = \dfrac{1}{\left| \dfrac{1}{\lambda[1-\phi^{-1}(y)]} \right|} = \lambda e^{-\lambda y}$ se $y > 0$

(perché se $y>0$, allora $0 < \phi^{-1}(y) < 1$)

Dunque:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & \text{se } y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$f_Y(y)$ è una d.d.p nota => densità esponenziale di parametro λ.

Per cui è noto che:

$E[Y] = 1/\lambda$

$Var(Y) = 1/\lambda^2$.

b) Premettiamo il calcolo di $P(Y>a)$, con $a>0$ generico.

$$P(Y>a) = \int_a^{+\infty} f_Y(y)\,dy = \int_a^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y}\,dy = \left[-e^{-\lambda y}\right]_a^{+\infty} = e^{-\lambda a}$$

Abbiamo:

$$P(Y>t+s \mid Y>t) = \frac{P(Y>t+s,\, Y>t)}{P(Y>t)} = \frac{P(Y>t+s)}{P(Y>t)} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(Y>s).$$

NOTA- $(Y>t+s) \cap (Y>t)$ coincide con $(Y>t+s)$, perchè se $Y>t+s$ allora è verificato anche $Y>t$, essendo $s>0$.