ESAME DI STATISTICA 18.07.2005

Candidato: **N. Matricola:**

Esercizio 1.

Una fabbrica produce chip elettronici. Questi escono da due linee di produzione A e B nelle proporzioni del 30% e del 70%, rispettivamente. La linea A ha una percentuale di pezzi difettosi del 10%, contro il 15% della linea B.

a) Qual è la probabilità che un chip scelto a caso sia difettoso?

b) I chip vengono venduti in confezioni di 10 pezzi, tutti prodotti dalla stessa linea. Una confezione viene ispezionata, e risulta contenere esattamente UN SOLO pezzo difettoso. Qual è la probabilità che la confezione provenga dalla linea A? E dalla linea B? Quale delle due eventualità è più probabile?

Esercizio 2.

Si considerino le funzioni:

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1) & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}\,x & -1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Determinare quale delle precedenti funzioni rappresenta effettivamente una densità di probabilità. Giustificare la risposta.

Si indichi con $f_{\mathbf{X}}(x)$ la funzione scelta al punto precedente e sia $\mathbf{X}$ una variabile aleatoria con densità di probabilità $f_{\mathbf{X}}(x)$.

b) Calcolare il valore atteso $m_{\mathbf{X}}$ e la varianza $\sigma^2_{\mathbf{X}}$ della variabile aleatoria $\mathbf{X}$.

Sia $\mathbf{Y}$ una variabile aleatoria la cui densità di probabilità condizionata (rispetto alla variabile aleatoria $\mathbf{X}$) vale:

$$f_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{y+x}{2(x+1)} & \text{se } -1 < x \le 1, \quad 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

c) Calcolare il valor medio $m_{\mathbf{Y}}$ e la varianza $\sigma^2_{\mathbf{Y}}$ della variabile aleatoria $\mathbf{Y}$.

d) Scrivere la matrice di covarianza delle variabili aleatorie $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.

e) Calcolare la probabilità $P\big(\mathbf{Y} \le 2\mathbf{X}\big)$.

Esercizio 3.

Una variabile aleatoria $\mathbf{X}$ ha densità di probabilità discreta:

$$p_{\mathbf{X}}(k) = \begin{cases} \frac{\alpha}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{-k} & \text{se } k = -1, -2, -3, \ldots \\ \frac{1}{4} & \text{se } k = 0 \\ \frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^{k} & \text{se } k = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Determinare il valore di α in modo tale che $p_{\mathbf{X}}(k)$ sia effettivamente una densità di probabilità discreta.

b) Calcolare il valore atteso $m_{\mathbf{X}}$ della variabile aleatoria $\mathbf{X}$.

Si consideri la variabile aleatoria $\mathbf{Y} = |\mathbf{X}|$.

c) Calcolare la densità di probabilità discreta $p_{\mathbf{Y}}(h)$ della variabile aleatoria $\mathbf{Y}$. Dire se si tratta di una densità nota e, in caso affermativo, specificarne i parametri.

Esercizio 1

a) Consideriamo gli eventi:

$A \equiv$ il chip è uscito dalla linea di produzione A

$B \equiv$ " " " " " " " " B

$D \equiv$ il chip è difettoso

I dati del problema sono:

$$P(A) = 0.3 \quad , \quad P(B) = 0.7 \, , \quad P(D|A) \triangleq d_A = 0.1 \, , \quad P(D|B) \triangleq d_B = 0.15$$

$$\Longrightarrow P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) = 0.3 \cdot 0.1 + 0.7 \cdot 0.15 = \underline{0.135}$$

b) Consideriamo gli eventi:

$A \equiv$ i chip nella confezione sono stati prodotti dalla linea A

$B \equiv$ " " " " " " " " " B

$D_1 \equiv$ UN SOLO pezzo nella confezione è difettoso

Abbiamo che:

$$P(D_1|A) = \binom{n}{1} d_A (1-d_A)^{n-1} = n d_A (1-d_A)^{n-1} = 10 \cdot 0.1 \cdot (0.9)^9 \simeq 0.387$$

densità binomiale calcolata per $k=1$ (probabilità di UN successo in n prove indipendenti)

$n=10$ (numero di pezzi in una confezione)

$$P(D_1|B) = \binom{n}{1} d_B (1-d_B)^{n-1} = n d_B (1-d_B)^{n-1} = 10 \cdot 0.15 \cdot (0.85)^9 \simeq 0.347$$

Da cui:

$$P(A|D_1) = \frac{P(A)P(D_1|A)}{P(A)P(D_1|A) + P(B)P(D_1|B)} = \frac{0.3 \cdot 0.387}{0.3 \cdot 0.387 + 0.7 \cdot 0.347} \simeq 0.323$$

Bayes

$$P(B|D_1) = 1 - P(A|D_1) \simeq 0.677$$

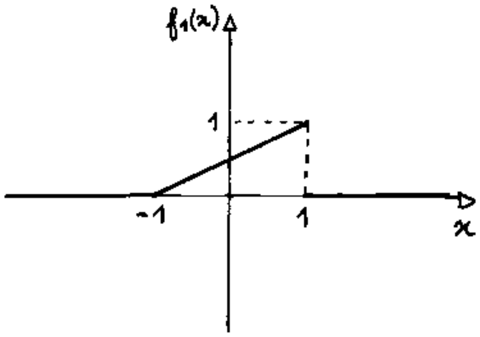
Infatti:

$$P(B|D_1) = \frac{P(B)P(D_1|B)}{P(A)P(D_1|A) + P(B)P(D_1|B)}$$

Dunque, essendo noto che un solo pezzo nella confezione è difettoso, è ancora più probabile che la confezione sia formata da pezzi provenienti dalla linea B, anche se $P(B|D_1) < P(B)$.

Esercizio 2

a) Il grafico di $f_1(x)$ è:



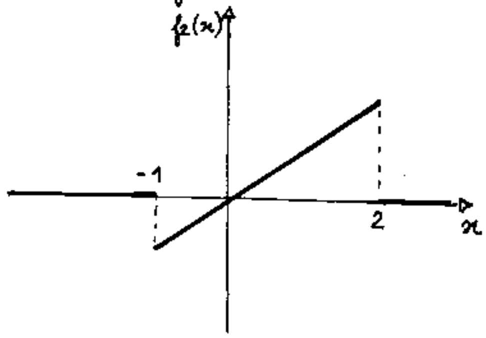
Dunque abbiamo:

- $f_1(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,dx = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$

area del triangolo

$\Rightarrow$ $f_1(x)$ è una densità di probabilità.

Il grafico di $f_2(x)$ è:



$\Rightarrow$ $f_2(x)$ non è una densità di probabilità, in quanto $f_2(x) < 0$ per $x \in [-1, 0)$.

Si osservi che, tuttavia:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\,dx = 1 \,!$$

Nel seguito:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1) & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

b) $$m_X = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{1}{2}(x+1)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

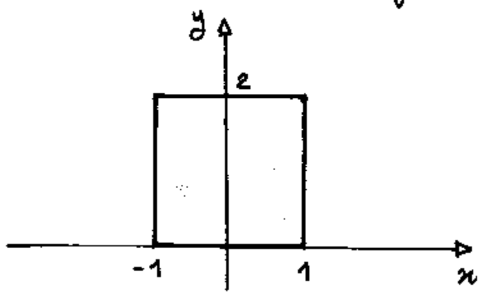
$$\sigma_X^2 = Var(X) = \underbrace{E[X^2]}_{} - m_X^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{1}{2}(x+1)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

c) La densità congiunta di X e Y si ottiene dalla formula:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+y) & \text{se } -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si osservi che il <u>supporto</u> di $f_{X,Y}(x,y)$ è il seguente:



La <u>densità marginale</u> di Y risulta:

- se $y<0$ oppure $y>2$: $f_Y(y)=0$
- se $0\le y\le 2$: $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(x+y)\,dx=\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}+xy\right]_{-1}^{1}=\frac{y}{2}$

Dunque:

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{y}{2} & \text{se } 0\le y\le 2\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

$$m_Y=E[Y]=\int_{-\infty}^{+\infty} y\,f_Y(y)\,dy=\int_0^2 y\cdot\frac{y}{2}\,dy=\left[\frac{y^3}{6}\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

$$\sigma_Y^2=Var(Y)=\underbrace{E[Y^2]}_{\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)dy=\int_0^2 y^2\cdot\frac{y}{2}\,dy=\left[\frac{y^4}{8}\right]_0^2=2}-m_Y^2=2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=2-\frac{16}{9}=\frac{2}{9}$$

d) $$Cov(X,Y)=\underbrace{E[XY]}_{}-m_X m_Y=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}=\frac{1}{3}-\frac{4}{9}=-\frac{1}{9}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\cdot f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}\int_0^2 xy\cdot\frac{1}{4}(x+y)\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}\frac{x}{4}\left[\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right]_0^2 dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{x}{4}\cdot\left(2x+\frac{8}{3}\right)dx=\left[\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{3}$$

Quindi:

$$\Sigma_{X,Y}=\begin{bmatrix}Var(X) & Cov(X,Y)\\ Cov(X,Y) & Var(Y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{9} & -\frac{1}{9}\\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9}\end{bmatrix}$$

<u>matrice di covarianza di X e Y</u>

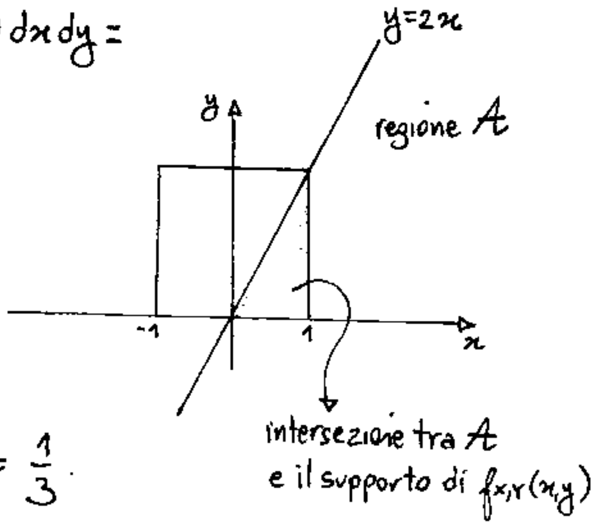
e) Definiamo la regione $\mathcal{A} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \le 2x \right\}$

$$P(Y \le 2X) = P\Big((X,Y) \in \mathcal{A}\Big) = \int_{\mathcal{A}} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2x} \frac{1}{4}(x+y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{4} \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{2x} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{4}\left(2x^2 + 2x^2\right) dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$



Esercizio 3

Si ricordino le serie notevoli: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, $\sum_{k=1}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$ $\quad |x| < 1$

a) $$1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_X(k) = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{\alpha}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{-k} + \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^k =$$

cambio di variabile $h=-k$ nella prima serie

$$= \frac{\alpha}{4} \sum_{h=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^h + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{1}{12}\right) \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k - 1 \right] + \frac{1}{4} = \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{3}{4}} - 1\right) + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{3}{4}\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2}{3}}$$

b) $$m_X = E[X] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\, p_X(k) = \sum_{k=-\infty}^{-1} k \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^{-k} + 0 \cdot \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^k =$$

cambio di variabile $h=-k$ nella prima serie

$$= -\frac{1}{6} \sum_{h=1}^{+\infty} h \left(\frac{3}{4}\right)^h + \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{3}{4}\right)^k =$$

$$= \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6}\right) \frac{\frac{3}{4}}{\left(1-\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{1}{12} \cdot 12 = -1$$

c) Dato che $X \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, si ha che: $Y = |X| \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

- Se $h=0$:

$$p_Y(0) = P(Y=0) = P(|X|=0) = P(X=0) = p_X(0) = \frac{1}{4}$$

- Se $h = 1, 2, 3, \dots$

$$p_Y(h) = P(Y=h) = P(|X|=h) = P\Big((X=h) \cup (X=-h)\Big) =$$

eventi disgiunti

$$= P(X=h) + P(X=-h) = p_X(h) + p_X(-h) =$$

$$= \frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^h + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^h = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^h$$

Dunque:

$$p_Y(h) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^h & \text{se } h = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Scrivendo $\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^h = p\,(1-p)^h$ con $p = \frac{1}{4}$, si riconosce una <u>densità geometrica</u> di parametro p.