ESAME DI STATISTICA 15.09.2005

Candidato: **N. Matricola:**

Esercizio 1.

Su 2 facce di un dado è stampato il numero 1, su 1 faccia il numero 2, e su 3 facce il numero 4. Si indichi con $\mathbf{X}$ la variabile aleatoria corrispondente al risultato di un lancio del dado.

a) Calcolare la densità di probabilità discreta $p_{\mathbf{X}}(x)$ della variabile aleatoria $\mathbf{X}$, il valore atteso $\mathrm{E}[\mathbf{X}]$ e la varianza $\mathrm{Var}(\mathbf{X})$.

Il dado viene lanciato n volte. Si indichi con $\mathbf{X}_i$ la variabile aleatoria corrispondente al risultato del lancio i-esimo, $i = 1, \ldots, n$.

b) Quanto deve essere grande n affinché la probabilità di ottenere 4 almeno una volta negli n lanci sia maggiore del 90%?

c) Calcolare la densità di probabilità congiunta $p_{\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2}(x_1, x_2)$ delle variabili aleatorie $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$.

Si consideri la variabile aleatoria $\mathbf{Y} = \dfrac{\mathbf{X}_1}{\mathbf{X}_2}$.

d) Calcolare la densità di probabilità discreta $p_{\mathbf{Y}}(y)$ della variabile aleatoria $\mathbf{Y}$, il valore atteso $\mathrm{E}[\mathbf{Y}]$ e la varianza $\mathrm{Var}(\mathbf{Y})$.

Esercizio 2.

Si consideri la funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \alpha \left(\frac{1}{x^2} + y \right) & \text{se } 1 \le x \le 3, \quad 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

in cui α è una costante reale.

a) Determinare il valore di α affinché $f(x, y)$ rappresenti una funzione di densità di probabilità.

Con il valore di α determinato al punto *a*), siano $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ due variabili aleatorie con densità di probabilità congiunta $f(x, y)$.

b) Calcolare le densità di probabilità marginali $f_{\mathbf{X}}(x)$ e $f_{\mathbf{Y}}(y)$ delle variabili aleatorie $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.

c) Stabilire se le variabili aleatorie $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ sono indipendenti.

d) Calcolare la densità di probabilità condizionata $f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(x|y)$.

e) Calcolare la probabilità $\mathrm{P}(A)$ dell'evento $A = \{\mathbf{X} \le 2\}$.

f) Come si modifica la probabilità dell'evento A nel caso in cui sia noto che la variabile aleatoria $\mathbf{Y}$ ha assunto il valore $\mathbf{Y} = \frac{1}{2}$?

Esercizio 3.

Si consideri la variabile aleatoria:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \mathbf{V},$$

dove la variabile aleatoria $\mathbf{X}$ segue una legge $N(2,1)$, mentre la variabile aleatoria $\mathbf{V}$ segue una legge $N(0,2)$. Le variabili aleatorie $\mathbf{X}$ e $\mathbf{V}$ sono inoltre indipendenti.

a) Calcolare la densità di probabilità congiunta $f_{\mathbf{X},\mathbf{V}}(x,v)$ delle variabili aleatorie $\mathbf{X}$ e $\mathbf{V}$. E' una densità nota? In caso affermativo, specificarne i parametri.

b) Calcolare il valore atteso $\mathrm{E}[\mathbf{Y}]$ e la varianza $\mathrm{Var}(\mathbf{Y})$.

c) Calcolare la densità di probabilità congiunta $f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x,y)$ delle variabili aleatorie $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$. *Suggerimento:* Il vettore $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ è una funzione lineare del vettore $(\mathbf{X},\mathbf{V})$...

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a) La variabile aleatoria X assume i valori $\{1,2,4\}$.

$$p_X(1) = P(X=1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$p_X(2) = P(X=2) = \frac{1}{6}$$

$$p_X(4) = P(X=4) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Dunque:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se } x=1 \\ \frac{1}{6} & \text{se } x=2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x=4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$E[X] = 1\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{2} = \frac{8}{3}$$

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 9 - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{17}{9}$$

$$= (1)^2\cdot\frac{1}{3} + (2)^2\cdot\frac{1}{6} + (4)^2\cdot\frac{1}{2} = 9$$

b) $P\{$ottenere 4 almeno una volta in n lanci$\} =$ passaggio all'evento complementare

$= 1 - P\{$non ottenere mai 4 in n lanci$\} =$

$$= 1 - [1 - p_X(4)]^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0.9$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0.1 \Rightarrow n \log\left(\frac{1}{2}\right) \leq \log 0.1 \Rightarrow n \geq \frac{\log 0.1}{\log 0.5} \simeq 3.32$$

NB - $\log 0.5 < 0$

Quindi occorrono almeno 4 lanci.

c) Le variabili aleatorie X_1 e X_2 sono indipendenti, e inoltre entrambe seguono la densità $p_X(x)$. Dunque:

$$p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = P(X_1=x_1, X_2=x_2) = P(X_1=x_1)\,P(X_2=x_2) = p_X(x_1)\,p_X(x_2),$$

per ogni coppia (x_1,x_2).

In particolare:

$$p_{X_1,X_2}(1,1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$p_{X_1,X_2}(1,2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

$$p_{X_1,X_2}(1,4) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$p_{X_1,X_2}(2,1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{18}$$

$$p_{X_1,X_2}(2,2) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$p_{X_1,X_2}(2,4) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{1}$$

$$p_{X_1,X_2}(4,1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$p_{X_1,X_2}(4,2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$p_{X_1,X_2}(4,4) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

d) La variabile aleatoria $Y = \dfrac{X_1}{X_2}$ assume i valori:

$$\left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{1}, \frac{4}{2}, \frac{4}{4} \right\} = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4 \right\}$$

$$p_Y\left(\tfrac{1}{4}\right) = P\left(Y=\tfrac{1}{4}\right) = P(X_1=1, X_2=4) = \frac{1}{6}$$

$$p_Y\left(\tfrac{1}{2}\right) = P\left(Y=\tfrac{1}{2}\right) = P(X_1=1, X_2=2) + P(X_1=2, X_2=4) = \frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{5}{36}$$

$$p_Y(1) = P(Y=1) = P(X_1=1, X_2=1) + P(X_1=2, X_2=2) + P(X_1=4, X_2=4) =$$
$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{4} = \frac{7}{18}$$

$$p_Y(2) = P(Y=2) = P(X_1=2, X_2=1) + P(X_1=4, X_2=2) = \frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{5}{36}$$

$$p_Y(4) = P(Y=4) = P(X_1=4, X_2=1) = \frac{1}{6}.$$

$p_Y(y) = 0$ altrimenti

$$E[Y] = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{36} + 1\cdot\frac{7}{18} + 2\cdot\frac{5}{36} + 4\cdot\frac{1}{6} = \frac{13}{9}$$

$$Var(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{117}{32} - \left(\frac{13}{9}\right)^2 = \frac{4069}{2592} \simeq 1.57$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{5}{36} + (1)^2\cdot\frac{7}{18} + (2)^2\cdot\frac{5}{36} + (4)^2\cdot\frac{1}{6} = \frac{117}{32}$$

Esercizio 2

a) Affinche' $f(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, deve essere $\alpha \geq 0$. Inoltre:

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^3\int_0^2 \alpha\left(\frac{1}{x^2}+y\right)dx\,dy = \alpha\int_1^3\left[\frac{y}{x^2}+\frac{y^2}{2}\right]_0^2 dx =$$

$$= \alpha\int_1^3\left(\frac{2}{x^2}+2\right)dx = 2\alpha\left[-\frac{1}{x}+x\right]_1^3 = 2\alpha\left(-\frac{1}{3}+3+\cancel{1}-\cancel{1}\right) = 2\alpha\cdot\frac{8}{3} = \frac{16}{3}\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{3}{16}$$

b) Se $1 \leq x \leq 3$:

$$f_X(x) = \int_0^2 \frac{3}{16}\left(\frac{1}{x^2}+y\right)dy = \frac{3}{16}\left[\frac{y}{x^2}+\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = \frac{3}{16}\left(\frac{2}{x^2}+2\right) = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}\left(\frac{1}{x^2}+1\right) & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se $0 \leq y \leq 2$:

$$f_Y(y) = \int_1^3 \frac{3}{16}\left(\frac{1}{x^2}+y\right)dx = \frac{3}{16}\left[-\frac{1}{x}+xy\right]_1^3 = \frac{3}{16}\left(-\frac{1}{3}+3y+1-y\right) =$$

$$= \frac{3}{8}\left(y+\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{8}\left(y+\frac{1}{3}\right) & \text{se } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

c) Nel punto $(x,y)=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$, interno al supporto di $f(x,y)$, si ha:

$$f\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{16}\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{96}\neq\frac{65}{384}=\frac{3}{8}\left(\frac{4}{9}+1\right)\cdot\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=f_X\left(\frac{3}{2}\right)f_Y\left(\frac{1}{2}\right)$$

Dato che le funzioni sono continue nell'intorno di tale punto, questa condizione è sufficiente per affermare che le variabili aleatorie X e Y non sono indipendenti.

d) Se $0\leq y\leq 2$ (dove $f_Y(y)\neq 0$):

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{3}{16}\left(\frac{1}{x^2}+y\right)}{\frac{3}{8}\left(y+\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{x^2}+y}{y+\frac{1}{3}}\quad \text{se } 1\leq x\leq 3$$

(=0 altrimenti)

e) $$P(A)=\int_{-\infty}^{2}f_X(x)\,dx=\int_1^2\frac{3}{8}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)dx=\frac{3}{8}\left[-\frac{1}{x}+x\right]_1^2=$$

$$=\frac{3}{8}\left(-\frac{1}{2}+2+1-1\right)=\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{16}$$

d) $$P\left(A|Y=\tfrac{1}{2}\right)=\int_{-\infty}^{2}f_{X|Y}\left(x|\tfrac{1}{2}\right)dx=\int_1^2\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}\,dx=\frac{3}{5}\left[-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}x\right]_1^2=$$

$$=\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{2}+1+1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{5}\cdot 1=\frac{3}{5}$$

Esercizio 3

a) Scriviamo le densità di X e V:

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1}e^{-\frac{(x-2)^2}{2\cdot 1}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$$

$$f_V(v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}}e^{-\frac{v^2}{2\cdot 2}}=\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2\pi}}}e^{-\frac{v^2}{4}}$$

Dato che X e V sono indipendenti:

$$f_{X,V}(x,v) = f_X(x) f_V(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}\left[(x-2)^2 + \frac{v^2}{2}\right]} = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{\det(\Sigma_{X,V})}} e^{-\frac{1}{2}(z-m_{X,V})^T \Sigma_{X,V}^{-1}(z-m_{X,V})}$$

dove si è posto $z = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$, $m_{X,V} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\Sigma_{X,V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Dunque X e V sono <u>congiuntamente gaussiane</u>, e la loro densità congiunta è una densità <u>normale bivariata</u> ($n=2$) con valore atteso $m_{X,V}$ e matrice di covarianza $\Sigma_{X,V}$.

b) $E[Y] = E[X-V] = E[X] - E[V] = 2 - 0 = 2$

$$Var(Y) = Var(X-V) \underset{\text{indipendenti}}{=} Var(X) + Var(Y) = 1+2=3$$

ATTENZIONE: <u>non</u> il segno "-"

c) $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ X-V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ V \end{bmatrix} \triangleq A \begin{bmatrix} X \\ V \end{bmatrix}$ dove $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Dunque X e Y sono <u>congiuntamente gaussiane</u>, e la loro densità congiunta è una densità <u>normale bivariata</u> con valore atteso:

$$m_{X,Y} = A\, m_{X,V} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e matrice di covarianza:

$$\Sigma_{X,Y} = A \Sigma_{X,V} A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$