

Candidato:

N. Matricola:

Esercizio 1.

Un primo programma genera i numeri 1, 2 e 3 con probabilità uniforme. Un secondo programma genera i numeri 1, 2 e 4 ciascuno con probabilità $\frac{1}{5}$, e 3 con probabilità $\frac{2}{5}$. Un esperimento consiste nel generare un numero con ognuno dei due programmi, e calcolarne la somma. Si indichino con $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$ i numeri generati rispettivamente dai due programmi, e $\mathbf{Z}$ la loro somma.

- Scrivere la densità di probabilità discreta $p_{\mathbf{Z}}(z)$ della variabile aleatoria $\mathbf{Z}$.
- Calcolare il valore atteso $E[\mathbf{Z}]$ e la varianza $\text{Var}(\mathbf{Z})$ della variabile aleatoria $\mathbf{Z}$.
- Scrivere la densità di probabilità condizionata $p_{\mathbf{X}_1|\mathbf{Z}}(x_1|z)$ di $\mathbf{X}_1$ rispetto a $\mathbf{Z}$ noto $\mathbf{Z} = 5$.

Si considerino M ripetizioni dell'esperimento.

- Se $M = 10$, qual è la probabilità di ottenere $\mathbf{Z} = 5$ esattamente 7 volte?
- Quanto deve essere grande M affinché la probabilità di ottenere $\mathbf{Z} = 5$ almeno una volta sia del 95%?

Esercizio 2.

Siano $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ due variabili aleatorie la cui densità di probabilità congiunta vale

$$f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x, y) = \begin{cases} \frac{2(x+\beta y)}{1+\beta} & \text{se } 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

in cui β è un parametro reale, positivo.

- Calcolare la probabilità $P(A)$ dell'evento $A = \{(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \mathbf{Y} \leq \mathbf{X}\}$.
- Calcolare le densità di probabilità marginali $f_{\mathbf{X}}(x)$, $f_{\mathbf{Y}}(y)$ delle variabili aleatorie $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.
- Determinare il valore β^* del parametro β in corrispondenza del quale le variabili aleatorie $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ risultano indipendenti.

Sia $\beta = 0$.

- Calcolare la covarianza $\text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ delle variabili aleatorie $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.
- Calcolare la densità di probabilità condizionata $f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(x|y)$ di $\mathbf{X}$ rispetto a $\mathbf{Y}$.

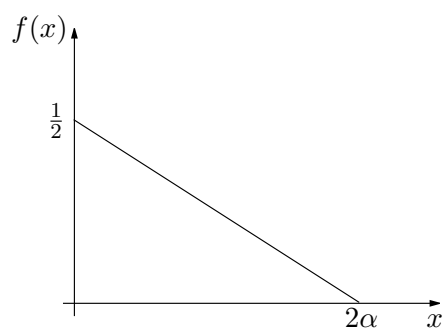
Esercizio 3.

Si consideri la funzione $f(x)$ in figura, dove α è un parametro.

- Scrivere l'espressione di $f(x)$, e determinare il valore di α in modo tale che $f(x)$ rappresenti una funzione di densità di probabilità.

Sia $\mathbf{X}$ una variabile aleatoria con densità di probabilità $f_{\mathbf{X}}(x) = f(x)$, e sia inoltre $\mathbf{Y} = (\mathbf{X} - 2)^2$.

- Calcolare la densità di probabilità della variabile aleatoria $\mathbf{Y}$.
- Calcolare il valore atteso $E[\mathbf{Y}]$ e la varianza $\text{Var}(\mathbf{Y})$ della variabile aleatoria $\mathbf{Y}$.



Esercizio 1a) Densità di probabilità discreta di X_1

$$p_{X_1}(1) = P(X_1=1) = \frac{1}{3}$$

$$p_{X_1}(2) = P(X_1=2) = \frac{1}{3}$$

 $\Rightarrow$ densità UNIFORME

$$p_{X_1}(3) = P(X_1=3) = \frac{1}{3}$$

Densità di probabilità discreta di X_2

$$p_{X_2}(1) = P(X_2=1) = \frac{1}{5}$$

$$p_{X_2}(2) = P(X_2=2) = \frac{1}{5}$$

$$p_{X_2}(3) = P(X_2=3) = \frac{2}{5}$$

$$p_{X_2}(4) = P(X_2=4) = \frac{1}{5}$$

Densità di probabilità discreta di $Z = X_1 + X_2$ $\Rightarrow$ Dato che $X_1 \in \{1, 2, 3\}$ e $X_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$, risulta $Z \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

$$\begin{aligned} p_Z(2) &= P(Z=2) = P(X_1+X_2=2) = P((X_1=1) \cap (X_2=1)) = \\ &= P(X_1=1)P(X_2=1) = p_{X_1}(1)p_{X_2}(1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

$\swarrow$ eventi indipendenti

Analogamente:

$$p_Z(3) = p_{X_1}(1)p_{X_2}(2) + p_{X_1}(2)p_{X_2}(1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

$\nwarrow$ eventi disgiunti

$$\begin{aligned} p_Z(4) &= p_{X_1}(1)p_{X_2}(3) + p_{X_1}(2)p_{X_2}(2) + p_{X_1}(3)p_{X_2}(1) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_Z(5) &= p_{X_1}(1)p_{X_2}(4) + p_{X_1}(2)p_{X_2}(3) + p_{X_1}(3)p_{X_2}(2) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

(2)

$$p_z(6) = p_{x_1}(2)p_{x_2}(4) + p_{x_1}(3)p_{x_2}(3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$p_z(7) = p_{x_1}(3)p_{x_2}(4) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

Ricapitolando:

$$p_z(z) = \begin{cases} \frac{1}{15} & \text{se } z=2,7 \\ \frac{2}{15} & \text{se } z=3 \\ \frac{1}{5} & \text{se } z=6 \\ \frac{4}{15} & \text{se } z=4,5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$b) E[Z] = \frac{1}{15} \cdot (2+7) + \frac{2}{15} \cdot 3 + \frac{1}{5} \cdot 6 + \frac{4}{15} \cdot (4+5) = \frac{23}{5}$$

$$E[Z^2] = \frac{1}{15} (2^2 + 7^2) + \frac{2}{15} \cdot 3^2 + \frac{1}{5} \cdot 6^2 + \frac{4}{15} (4^2 + 5^2) = \frac{343}{15}$$

$$\text{Var}(Z) = E[Z^2] - E[Z]^2 = \frac{343}{15} - \left(\frac{23}{5}\right)^2 = \frac{128}{75}$$

c) Si ricordi che:

$$p_{x_1|z}(x_1|z) = P(X_1=x_1|Z=z) = \frac{P((X_1=x_1) \cap (Z=z))}{P(Z=z)}$$

Si osservi inoltre che, essendo $Z = X_1 + X_2$, risulta:

$$P((X_1=x_1) \cap (Z=z)) = P((X_1=x_1) \cap (X_2=z-x_1)) = P(X_1=x_1)P(X_2=z-x_1)$$

Dunque:

$$p_{x_1|z}(x_1|z) = \frac{p_{x_1}(x_1)p_{x_2}(z-x_1)}{p_z(z)}$$

eventi indipendenti

Da cui:

(3)

$$p_{x_1|z}(1|5) = \frac{p_{x_1}(1) p_{x_2}(4)}{p_z(5)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{4}{15}} = \frac{1}{4}$$

$$p_{x_1|z}(2|5) = \frac{p_{x_1}(2) p_{x_2}(3)}{p_z(5)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{4}{15}} = \frac{1}{2}$$

$$p_{x_1|z}(3|5) = \frac{p_{x_1}(3) p_{x_2}(2)}{p_z(5)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{4}{15}} = \frac{1}{4}$$

NOTA- Si osservi che $p_{x_1|z}(1|5) + p_{x_1|z}(2|5) + p_{x_1|z}(3|5) = 1$,
come deve essere perché $p_{x_1|z}(x_1|5)$ è una densità di probabilità discreta.

$$d) P(Z=5 \text{ esattamente } 7 \text{ volte}) = \binom{10}{7} \left(\frac{4}{15}\right)^7 \left(1 - \frac{4}{15}\right) \approx 0.0045$$

schema successo-insuccesso

Densità binomiale: 10 prove, 7 successi,
probabilità di successo: $\frac{4}{15}$

$$e) P(Z=5 \text{ almeno una volta}) = 1 - P(Z=5 \text{ mai})$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{4}{15}\right)^M = 1 - \left(\frac{11}{15}\right)^M \geq 0.95$$

$$\Rightarrow \left(\frac{11}{15}\right)^M \leq 0.05 \quad \Rightarrow \quad M \log \frac{11}{15} \leq \log 0.05$$

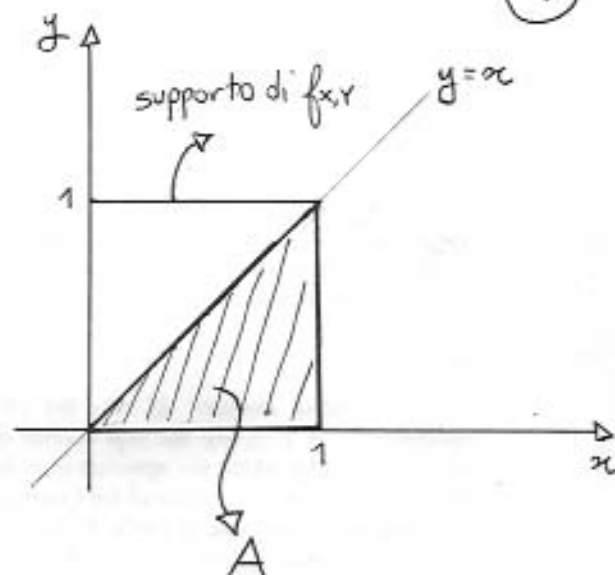
$$\Rightarrow M \geq \frac{\log 0.05}{\log \frac{11}{15}} \approx 9.6588 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{M \geq 10}}$$

Attenzione! $\log \frac{11}{15}$ è minore di zero!

Esercizio 2

④

$$\begin{aligned} a) \quad P(A) &= \iint_A f_{X,Y}(x,y) dx dy = \\ &= \int_0^1 \int_0^x \frac{2(x+\beta y)}{1+\beta} dx dy = \\ &= \frac{2}{1+\beta} \int_0^1 \left[\int_0^x (x+\beta y) dy \right] dx = \\ &= \frac{2}{1+\beta} \int_0^1 \left[xy + \beta \frac{y^2}{2} \right]_0^x dx = \\ &= \frac{2}{1+\beta} \int_0^1 \left(x^2 + \beta \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{2 \left(1 + \frac{\beta}{2} \right)}{1+\beta} \int_0^1 x^2 dx = \\ &= \frac{2+\beta}{1+\beta} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2+\beta}{3(1+\beta)} \end{aligned}$$



$$b) \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$$

$$\Rightarrow f_X(x) = 0 \quad \text{se } x < 0 \text{ o } x > 1$$

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{2(x+\beta y)}{1+\beta} dy = \frac{2}{1+\beta} \left[xy + \beta \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{2x+\beta}{1+\beta} \quad \text{se } 0 \leq x \leq 1$$

Dunque:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2x+\beta}{1+\beta} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx$$

(5)

$$\Rightarrow f_Y(y) = 0 \text{ se } y < 0 \text{ o } y > 1$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{2(x+\beta y)}{1+\beta} dx = \frac{2}{1+\beta} \left[\frac{x^2}{2} + \beta xy \right]_0^1 = \frac{2\beta y + 1}{1+\beta} \text{ se } 0 \leq y \leq 1$$

Dunque:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2\beta y + 1}{1+\beta} & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

c) Affinché X e Y siano indipendenti deve risultare

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tranne al più un insieme di misura nulla.

Dunque sul quadrato $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$:

$$\frac{2(x+\beta y)}{1+\beta} = \frac{2x+\beta}{1+\beta} \cdot \frac{2\beta y + 1}{1+\beta}$$

$$\Rightarrow 2(1+\beta)(x+\beta y) = 2x + 2\beta^2 y + \underbrace{4\beta xy + \beta}_{\downarrow}$$

per annullare questa parte: $\beta = 0$

E sostituendo $\beta = 0$:

$$2x = 2x \quad \underline{\text{verificata}}$$

Dunque X e Y sono indipendenti se e solo se $\beta = \beta^* = 0$.

(6)

- d) Dato che $\beta=0$, e si è mostrato al punto c) che per tale valore X e Y sono indipendenti, e quindi anche scorrelate, possiamo scrivere immediatamente:

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$

- e) Dato che per $\beta=0$ X e Y sono indipendenti:

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esercizio 3

a)

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4\alpha}x + \frac{1}{2} & \text{se } 0 \leq x \leq 2\alpha \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si osservi che $f(x) \geq 0$ per ogni x . Affinché sia una densità di probabilità deve risultare:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{2\alpha \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

↓
area del triangolo

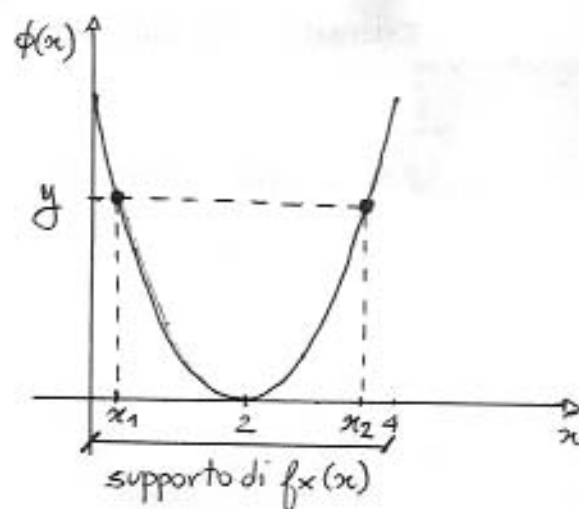
Dunque $\alpha = 2$.

b) 1° metodo

$$Y = (X-2)^2 \Rightarrow \phi(x) = (x-2)^2$$

$$y = (x-2)^2 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{y}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - \sqrt{y} \\ x_2 = 2 + \sqrt{y} \end{cases}$$



Si osservi che $x \in \underbrace{[0,4]}_{\text{supporto di } f_X(x)}$ implica $y = \phi(x) \in [0,4]$.

(7)

Inoltre: $\phi'(x) = 2(x-2)$.

Per $y \in (0,4]$:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{f_X(x_1)}{|\phi'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|\phi'(x_2)|} = \frac{-\frac{1}{8}(2-\sqrt{y}) + \frac{1}{2}}{2\sqrt{y}} + \frac{-\frac{1}{8}(2+\sqrt{y}) + \frac{1}{2}}{2\sqrt{y}} = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{y}} \end{aligned}$$

Dunque:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}} & \text{se } 0 < y \leq 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2° metodo

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P((X-2)^2 \leq y)$$

Se $y < 0$:

↗ quantità sempre non negativa

$$F_Y(y) = P((X-2)^2 \leq y) = 0$$

Se $0 \leq y \leq 4$:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P((X-2)^2 \leq y) = P(2-\sqrt{y} \leq X \leq 2+\sqrt{y}) = \\ &= \int_{2-\sqrt{y}}^{2+\sqrt{y}} \underbrace{\left(-\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}\right)}_{f_X(x)} dx = \left[-\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}x\right]_{2-\sqrt{y}}^{2+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{2} \end{aligned}$$

Se $y > 4$:

$$F_Y(y) = P((X-2)^2 \leq y) = P(\underbrace{2-\sqrt{y}}_{<0} \leq X \leq \underbrace{2+\sqrt{y}}_{>4})$$

$$= \int_{2-\sqrt{y}}^{2+\sqrt{y}} f_X(x) dx = \int_0^4 \left(-\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}\right) dx = 1$$

Dunque:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ \frac{\sqrt{y}}{2} & \text{se } 0 \leq y \leq 4 \\ 1 & \text{se } y > 4 \end{cases}$$

Essendo $f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$ (dove $F_Y(y)$ è derivabile...), risulta:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}} & \text{se } 0 < y \leq 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$c) E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^4 y \cdot \frac{1}{4\sqrt{y}} dy = \int_0^4 \frac{\sqrt{y}}{4} dy = \left[\frac{y^{\frac{3}{2}}}{6} \right]_0^4 = \frac{4}{3}$$

NOTA - Lo stesso risultato si ottiene calcolando $\int_{-\infty}^{+\infty} (x-2)^2 f_X(x) dx$.

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y) dy = \int_0^4 y^2 \cdot \frac{1}{4\sqrt{y}} dy = \int_0^4 \frac{y^{\frac{3}{2}}}{4} dy = \left[\frac{y^{\frac{5}{2}}}{10} \right]_0^4 = \frac{16}{5}$$

$$\text{Var}(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{16}{5} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{64}{45}$$