

Candidato:

N. Matricola:

Esercizio 1.

Un'urna etichettata con A contiene b_1 palline nere e r_1 palline rosse. Una pallina viene estratta a caso dall'urna e reintrodotta senza guardarla in una seconda urna etichettata con B , dove sono già presenti b_2 palline nere e r_2 palline rosse. Due palline vengono quindi estratte senza rimpiazzo dall'urna B . Noto che la prima pallina estratta dall'urna B è rossa:

- Calcolare la probabilità che la pallina estratta dall'urna A fosse rossa, e confrontarla con la corrispondente probabilità a priori.
- Calcolare la probabilità che la seconda pallina estratta dall'urna B sia nera.

Esercizio 2.

Si considerino le funzioni:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & x < -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6}x^2 & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}, \quad F_2(x) = \begin{cases} 0 & x < -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{11}{12}x + \frac{1}{3}x^3 & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

- Determinare quale delle precedenti funzioni rappresenta una funzione di *distribuzione* della probabilità.

Si indichi con $f_{\mathbf{X}}(x)$ la *densità* di probabilità corrispondente alla distribuzione scelta al punto precedente e sia $\mathbf{X}$ una variabile aleatoria con densità di probabilità $f_{\mathbf{X}}(x)$.

- Calcolare il valor medio $E[\mathbf{X}]$ e la varianza $\text{Var}(\mathbf{X})$ della variabile aleatoria $\mathbf{X}$.

Sia $\mathbf{Y}$ una variabile aleatoria la cui densità di probabilità condizionata (rispetto alla variabile aleatoria $\mathbf{X}$) vale

$$f_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(y|x) = \begin{cases} \frac{\frac{11}{4}y^2 + x^2}{\frac{11}{12} + x^2} & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Calcolare il valor medio $E[\mathbf{Y}]$ e la varianza $\text{Var}(\mathbf{Y})$ della variabile aleatoria $\mathbf{Y}$.
- Scrivere la matrice di covarianza delle variabili aleatorie $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$. Sono indipendenti?

Esercizio 3.

Le variabili aleatorie $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ e $\mathbf{X}_3$ seguono ciascuna una legge $N(0, 1)$. Noto che esse sono inoltre congiuntamente gaussiane, con covarianze $\text{Cov}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \frac{1}{3}$, $\text{Cov}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3) = -\frac{1}{2}$, e $\text{Cov}(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3) = -\frac{1}{6}$:

- Scrivere l'espressione della densità di probabilità congiunta delle variabili aleatorie $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$.
- Determinare i valori del parametro reale α tali che le variabili aleatorie

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1 &= (1 - \alpha)\mathbf{X}_1 - 3\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{Y}_2 &= \mathbf{X}_1 + \alpha\mathbf{X}_3 \end{aligned}$$

sono indipendenti. Per quali valori di α le due variabili aleatorie sono correlate negativamente?

Esercizio 1

Indichiamo con:

- X il risultato dell'estrazione dall'urna A
- Y_1 il risultato della prima estrazione dall'urna B
- Y_2 " " " seconda " " " "

I possibili risultati sono:

- $N \equiv$ viene estratta una pallina nera
- $R \equiv$ " " " " rossa

a) Viene richiesto di calcolare $P(X=R | Y_1=R)$.

Applicando il Teorema di Bayes:

$$P(X=R | Y_1=R) = \frac{P(Y_1=R | X=R) P(X=R)}{P(Y_1=R | X=R) P(X=R) + P(Y_1=R | X=N) P(X=N)}$$

Abbiamo:

$$P(X=R) = \frac{r_1}{r_1 + b_1}$$

$$P(Y_1=R | X=R) = \frac{r_2 + 1}{r_2 + b_2 + 1}$$

$$P(X=N) = \frac{b_1}{r_1 + b_1}$$

$$P(Y_1=R | X=N) = \frac{r_2}{r_2 + b_2 + 1}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} P(X=R | Y_1=R) &= \frac{\frac{r_2 + 1}{r_2 + b_2 + 1} \cdot \frac{r_1}{r_1 + b_1}}{\frac{r_2 + 1}{r_2 + b_2 + 1} \cdot \frac{r_1}{r_1 + b_1} + \frac{r_2}{r_2 + b_2 + 1} \cdot \frac{b_1}{r_1 + b_1}} = \\ &= \frac{(r_2 + 1)r_1}{(r_2 + 1)r_1 + r_2 b_1} = \frac{r_1}{r_1 + \frac{r_2}{r_2 + 1} b_1} \triangleq p \end{aligned}$$

$\frac{r_2}{r_2 + 1} < 1$

$$\Rightarrow P(X=R | Y_1=R) > P(X=R) \quad \triangleq \text{probabilità a priori}$$

(2)

b) Viene richiesto di calcolare $P(Y_2=N|Y_1=R)$.

Applicando la partizione dell'evento certo:

$$P(Y_2=N|Y_1=R) = P(Y_2=N|X=R, Y_1=R)P(X=R|Y_1=R) + \\ + P(Y_2=N|X=N, Y_1=R)P(X=N|Y_1=R)$$

Abbiamo:

$$P(Y_2=N|X=R, Y_1=R) = \frac{b_2}{r_2+b_2}$$

$$P(Y_2=N|X=N, Y_1=R) = \frac{b_2+1}{(r_2-1)+(b_2+1)} = \frac{b_2+1}{r_2+b_2}$$

$$\text{Inoltre: } P(X=N|Y_1=R) = 1 - P(X=R|Y_1=R) = 1-p$$

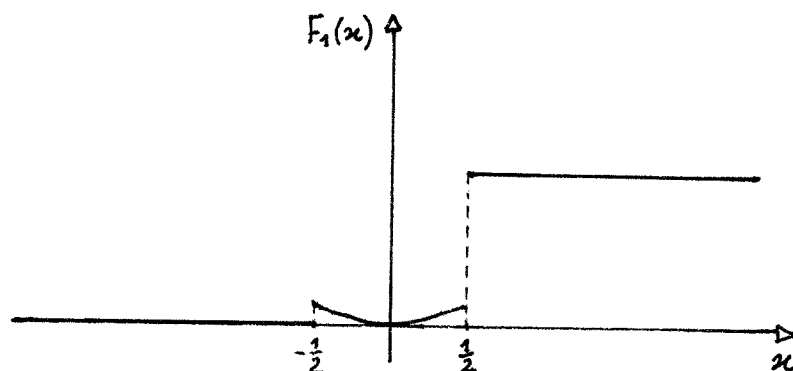
Quindi:

$$P(Y_2=N|Y_1=R) = \frac{b_2}{r_2+b_2} \cdot p + \frac{b_2+1}{r_2+b_2} \cdot (1-p) = \frac{b_2 + (1-p)}{r_2+b_2}$$

← calcolata al punto a)

Esercizio 2

a) Osservando il grafico della funzione $F_1(x)$:



è chiaro che essa NON rappresenta una funzione di distribuzione di probabilità, in quanto è decrescente nell'intervallo $[-\frac{1}{2}, 0]$.

La funzione $F_2(x)$ soddisfa invece tutte le proprietà di una distribuzione di probabilità (verificare...).

$$b) \quad f_X(x) = \frac{dF_2(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{11}{12} + x^2 & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x \left(\frac{11}{12} + x^2 \right) dx = \left[\frac{11}{24} x^2 + \frac{x^4}{4} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[X^2] - \underbrace{E[X]^2}_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 \left(\frac{11}{12} + x^2 \right) dx = \\ &= \left[\frac{11}{36} x^3 + \frac{x^5}{5} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{64}{720} = \frac{4}{45} \end{aligned}$$

c) La densità congiunta di X e Y è:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x) = \begin{cases} \frac{11}{4} y^2 + x^2 & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La densità marginale di Y è:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx = \begin{cases} \frac{11}{4} y^2 + \frac{1}{12} & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \quad (*) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$(*) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{11}{4} y^2 + x^2 \right) dx = \left[\frac{11}{4} y^2 x + \frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{11}{4} y^2 + \frac{1}{12}$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^1 y \left(\frac{11}{4} y^2 + \frac{1}{12} \right) dy = \left[\frac{11}{16} y^4 + \frac{1}{24} y^2 \right]_0^1 = \frac{35}{48}$$

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y) dy = \int_0^1 y^2 \left(\frac{11}{4} y^2 + \frac{1}{12} \right) dy = \left[\frac{11}{20} y^5 + \frac{1}{36} y^3 \right]_0^1 = \frac{26}{45}$$

$$\text{Var}(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{26}{45} - \left(\frac{35}{48} \right)^2 = \frac{59}{1280}$$

$$\begin{aligned}
 d) \quad E[XY] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{x,y}(x,y) dx dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^1 xy \left(\frac{11}{4} y^2 + x^2 \right) dx dy \\
 &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{11}{16} xy^4 + \frac{1}{2} x^3 y^2 \right]_0^1 dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{11}{6} y + \frac{1}{2} y^3 \right) dy = \\
 &= \left[\frac{11}{12} y^2 + \frac{1}{8} y^4 \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 0
 \end{aligned}$$

(4)

$$\text{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 0$$

Le variabili aleatorie X e Y sono scorrelate (perché $\text{Cov}(X,Y)=0$), ma non indipendenti, perché $f_{x,y}(x,y) \neq f_x(x)f_y(y)$ su un insieme di misura non nulla.

La matrice di covarianza di X e Y è:

$$\Sigma_{X,Y} = \begin{bmatrix} \text{Var}(X) & \text{Cov}(X,Y) \\ \text{Cov}(X,Y) & \text{Var}(Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{45} & 0 \\ 0 & \frac{59}{1280} \end{bmatrix}.$$



Esercizio 3

a) Le variabili aleatorie X_1 e X_2 sono congiuntamente gaussiane, con vettore dei valori attesi:

$$m_{1,2} = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e matrice di covarianza:

$$\Sigma_{1,2} = \begin{bmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) \\ \text{Cov}(X_1, X_2) & \text{Var}(X_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

L'espressione della loro densità congiunta è dunque:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\det(\Sigma_{1,2})}} e^{-\frac{1}{2} [x_1 \ x_2] \Sigma_{1,2}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = \dots$$

b) Le variabili aleatorie Y_1 e Y_2 sono combinazioni lineari delle variabili aleatorie congiuntamente gaussiane X_1, X_2 e X_3 . Dunque, anche Y_1 e Y_2 sono congiuntamente gaussiane, e sono indipendenti se e solo se sono scorrelate.

$$E[Y_1] = E[(1-\alpha)X_1 - 3X_2] = (1-\alpha) \underbrace{E[X_1]}_0 - 3 \underbrace{E[X_2]}_0 = 0$$

$$E[Y_2] = E[X_1 + \alpha X_3] = \underbrace{E[X_1]}_0 + \alpha \underbrace{E[X_3]}_0 = 0$$

$$E[Y_1 Y_2] = E[(1-\alpha)X_1 - 3X_2](X_1 + \alpha X_3) =$$

$$= E[(1-\alpha)X_1^2 + \alpha(1-\alpha)X_1X_3 - 3X_1X_2 - 3\alpha X_2X_3] =$$

$$= (1-\alpha) \underbrace{E[X_1^2]}_1 + \alpha(1-\alpha) \underbrace{E[X_1X_3]}_{-\frac{1}{2}} - 3 \underbrace{E[X_1X_2]}_{\frac{1}{3}} - 3\alpha \underbrace{E[X_2X_3]}_{-\frac{1}{6}} =$$

$$= (1-\alpha) - \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha) - 1 + \frac{1}{2}\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\alpha^2 - \alpha = \alpha \left(\frac{1}{2}\alpha - 1 \right)$$

NOTA - X_1, X_2 e X_3
sono a media nulla

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = E[Y_1 Y_2] - E[Y_1]E[Y_2] = \alpha \left(\frac{1}{2}\alpha - 1 \right)$$

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = 0 \quad \underline{\text{sse}} \quad \alpha = 0 \quad \text{oppure} \quad \alpha = 2$$

$\Rightarrow Y_1$ e Y_2 sono indipendenti se $\alpha = 0$ oppure $\alpha = 2$.

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) < 0 \quad \underline{\text{sse}} \quad 0 < \alpha < 2$$

$\Rightarrow Y_1$ e Y_2 sono correlate negativamente se $0 < \alpha < 2$.