

ESAME DI STATISTICA 04.07.2005

Esercizio 1.

Da una scatola contenente 2 pezzi di tipo A, 5 pezzi di tipo B e 5 pezzi di tipo C, un addetto preleva i pezzi a caso e *senza rimpiazzo*. Una macchina lavora due pezzi dello stesso tipo alla volta. Sia $\mathbf{T}$ la variabile aleatoria che rappresenta il numero di prelievi di pezzi necessari per far partire la lavorazione della macchina.

- a) Scrivere la densità di probabilità discreta $p_{\mathbf{T}}(k)$ di $\mathbf{T}$.
- b) Calcolare il valore atteso $m_{\mathbf{T}}$ e la varianza $\sigma_{\mathbf{T}}^2$ di $\mathbf{T}$.
- c) Calcolare la probabilità che il secondo pezzo prelevato sia di tipo A se il terzo pezzo prelevato è di tipo A e $\mathbf{T} \geq 3$. Confrontare questo valore con la probabilità (*a priori*) che il secondo pezzo prelevato sia di tipo A, e spiegare il risultato.

Esercizio 2.

Si consideri la funzione:

$$f_{\mathbf{X}}(x) = \begin{cases} \alpha e^{-5x} & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

in cui α è una costante reale.

- a) Determinare il valore di α affinché $f_{\mathbf{X}}(x)$ rappresenti una funzione di densità di probabilità.

Sia $\mathbf{X}$ una variabile aleatoria con densità di probabilità $f_{\mathbf{X}}(x)$.

- b) Calcolare il valore atteso $m_{\mathbf{X}}$ e la varianza $\sigma_{\mathbf{X}}^2$ di $\mathbf{X}$.

Sia $\mathbf{Y}$ una variabile aleatoria uniformemente distribuita nell'intervallo $[0, \frac{1}{4}]$.

- c) Scrivere l'espressione della densità di probabilità $f_{\mathbf{Y}}(y)$ di $\mathbf{Y}$.
- d) Supponendo che $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ siano indipendenti, scrivere l'espressione della densità di probabilità congiunta $f_{\mathbf{X}, \mathbf{Y}}(x, y)$ di $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.
- e) Calcolare la probabilità $P(\mathbf{X} + \mathbf{Y} \leq \frac{3}{4})$.
- f) Stabilire se le variabili aleatorie $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ sono scorrelate, e scrivere la matrice di covarianza di $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.

Esercizio 3.

Una variabile aleatoria $\mathbf{X}$ ha densità di probabilità:

$$f_{\mathbf{X}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se } -1 \leq x < -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{8} & \text{se } -\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si consideri la variabile aleatoria $\mathbf{Y} = 3|\mathbf{X}|$.

- a) Scrivere l'espressione della funzione di distribuzione di probabilità $F_{\mathbf{Y}}(y)$ di $\mathbf{Y}$.
- b) Calcolare il valore atteso $m_{\mathbf{Y}}$ e la varianza $\sigma_{\mathbf{Y}}^2$ di $\mathbf{Y}$.

Esercizio 1

Quando l'addetto ha prelevato due pezzi dello stesso tipo (e non importa di che tipo), fa partire la lavorazione della macchina.

Per prelevare due pezzi dello stesso tipo, occorrono chiaramente almeno DUE prelievi, e al massimo QUATTRO (perché i tipi di pezzi sono tre...)

Dunque: $T \in \{2, 3, 4\}$.

a) Dobbiamo calcolare i valori:

$$p_T(2) \triangleq P(T=2)$$

$$p_T(3) \triangleq P(T=3)$$

$$p_T(4) \triangleq P(T=4)$$

Supponiamo di effettuare n prelievi. Allora l'insieme dei possibili risultati è dato da:

$$\Omega = \{ \omega = (w_1, \dots, w_n) : w_i = A, B, C \}$$

cioè $w_i \triangleq$ tipo dell' i -esimo pezzo estratto.

Calcoliamo $p_T(2)$.

$$\begin{aligned} p_T(2) &= P(T=2) = P(w_1 = w_2) = \\ &= P((w_1=A, w_2=A) \cup (w_1=B, w_2=B) \cup (w_1=C, w_2=C)) = \\ &= P(w_1=A, w_2=A) + P(w_1=B, w_2=B) + P(w_1=C, w_2=C) = \quad \downarrow \text{eventi disgiunti} \\ &= P(w_1=A) P(w_2=A | w_1=A) + P(w_1=B) P(w_2=B | w_1=B) + \\ &\quad + P(w_1=C) P(w_2=C | w_1=C) = \\ &= \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} + \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{1}{12 \cdot 11} (2 + 20 + 20) = \frac{42}{12 \cdot 11} = \frac{7}{22} \end{aligned}$$

Calcoliamo $p_T(4)$.

2

$$\begin{aligned} p_T(4) &= P(T=4) = P((w_1 \neq w_2) \cap (w_1 \neq w_3) \cap (w_2 \neq w_3)) = \dots = \\ &= P(w_1=A, w_2=B, w_3=C) + P(w_1=A, w_2=C, w_3=B) + \\ &\quad + P(w_1=B, w_2=A, w_3=C) + P(w_1=B, w_2=C, w_3=A) + \\ &\quad + P(w_1=C, w_2=A, w_3=B) + P(w_1=C, w_2=B, w_3=A) = \\ &= P(w_1=A)P(w_2=B|w_1=A)P(w_3=C|w_1=A, w_2=B) + \dots = \\ &= \frac{2}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{5}{10} + \frac{2}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{5}{10} + \frac{5}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{5}{10} + \\ &\quad + \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{2}{10} + \frac{5}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{5}{10} + \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{2}{10} = \\ &= 6 \cdot \frac{5 \cdot 5 \cdot 2}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{5}{22} \end{aligned}$$

Dato che $p_T(k)$ è una densità di probabilità discreta, soddisfa:

$$p_T(2) + p_T(3) + p_T(4) = 1$$

Quindi possiamo ricavare $p_T(3)$:

$$p_T(3) = 1 - p_T(2) - p_T(4) = 1 - \frac{7}{22} - \frac{5}{22} = 1 - \frac{12}{22} = \frac{5}{11}$$

Ricapitolando:

$$p_T(k) = \begin{cases} \frac{7}{22} & \text{se } k=2 \\ \frac{5}{11} & \text{se } k=3 \\ \frac{5}{22} & \text{se } k=4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

NOTA- Calcolo diretto di $p_T(3)$

3

$$p_T(3) = P(T=3) = P\left((w_1=w_3, w_1 \neq w_2) \cup (w_1 \neq w_2, w_2=w_3)\right) = \dots =$$

$$= P(w_1=A, w_2 \neq A, w_3=A) + P(w_1 \neq A, w_2=A, w_3=A) + \\ + P(w_1=B, w_2 \neq B, w_3=B) + P(w_1 \neq B, w_2=B, w_3=B) + \\ + P(w_1=C, w_2 \neq C, w_3=C) + P(w_1 \neq C, w_2=C, w_3=C) =$$

$$= P(w_1=A)P(w_2 \neq A | w_1=A)P(w_3=A | w_1=A, w_2 \neq A) + \dots =$$

$$= \frac{2}{12} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{1}{10} + \frac{10}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} + \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10} +$$

$$+ \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} =$$

$$= \frac{1}{12 \cdot 11 \cdot 10} (20 + 20 + 140 + 140 + 140 + 140) = \frac{600}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{60}{12 \cdot 11} = \frac{5}{11}$$

$$b) E[T] = 2 \cdot \frac{7}{22} + 3 \cdot \frac{5}{11} + 4 \cdot \frac{5}{22} = \frac{7+15+10}{11} = \frac{32}{11} \approx 2.9$$

$$\text{Var}(T) = E[T^2] - E[T]^2 = 9 - \left(\frac{32}{11}\right)^2 = \frac{65}{121}$$

$$= 4 \cdot \frac{7}{22} + 9 \cdot \frac{5}{11} + 16 \cdot \frac{5}{22} = \frac{14+45+40}{11} = \frac{99}{11} = 9$$

c) È richiesto di calcolare:

$$P(w_2=A | w_3=A) = \frac{P(w_2=A, w_3=A)}{P(w_3=A)}$$

NOTA- Dato che siamo arrivati al terzo prelievo, implicitamente $T \geq 3$

dove:

$$P(w_2=A, w_3=A) = P(w_1=B, w_2=A, w_3=A) + P(w_1=C, w_2=A, w_3=A) =$$

$$= P(w_1=B)P(w_2=A | w_1=B)P(w_3=A | w_1=B, w_2=A) + \dots =$$

$$= \frac{5}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} + \frac{5}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} = \frac{20}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{1}{66}$$

4

NOTA - Dato che abbiamo fissato $w_2=A$ e $w_3=A$, si ha che $w_1 \neq A$ (altrimenti ci saremmo fermati al secondo prelievo, perchè $T=2$!)

$$\begin{aligned} P(w_3=A) &= P(w_1=A, w_2=B, w_3=A) + P(w_1=A, w_2=C, w_3=A) + \\ &\quad + P(w_1=B, w_2=A, w_3=A) + P(w_1=B, w_2=C, w_3=A) + \\ &\quad + P(w_1=C, w_2=A, w_3=A) + P(w_1=C, w_2=B, w_3=A) = \dots = \\ &= \frac{2}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{1}{10} + \frac{2}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{1}{10} + \frac{5}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} + \\ &\quad + \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{2}{10} + \frac{5}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} + \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{2}{10} = \\ &= \frac{1}{12 \cdot 11 \cdot 10} (10 + 10 + 10 + 50 + 10 + 50) = \frac{140}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{7}{66} \end{aligned}$$

NOTA - Non abbiamo considerato, per esempio, la sequenza $(w_1=B, w_2=B, w_3=A)$ perchè altrimenti ci saremmo fermati al secondo prelievo, essendo $T=2$.

Dunque:

$$P(w_2=A | w_3=A) = \frac{\frac{1}{66}}{\frac{7}{66}} = \frac{1}{7}$$

La probabilità a priori di $w_2=A$ è:

$$\begin{aligned} P(w_2=A) &= P(w_1=A, w_2=A) + P(w_1=B, w_2=A) + P(w_1=C, w_2=A) = \\ &= \dots = \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} + \frac{5}{12} \cdot \frac{2}{11} + \frac{5}{12} \cdot \frac{2}{11} = \frac{1}{12 \cdot 11} (2 + 10 + 10) = \\ &= \frac{22}{12 \cdot 11} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Dunque:

$$P(w_2=A | w_3=A) = \frac{1}{7} < \frac{1}{6} = P(w_2=A)$$

↳ Sapere che al terzo prelievo il pezzo è di tipo A, e inoltre $T \geq 3$, ci dà l'informazione che nei primi due prelievi un pezzo di tipo A è estratto al più una volta, e ciò riduce la probabilità che sia estratto proprio al secondo prelievo.

Esercizio 2

5

$$a) \quad 1 = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \alpha e^{-5x} dx = \alpha \left[-\frac{e^{-5x}}{5} \right]_{\frac{1}{2}}^{+\infty} = \alpha \frac{e^{-\frac{5}{2}}}{5}$$

$$\alpha \frac{e^{-\frac{5}{2}}}{5} = 1 \Rightarrow \alpha = 5 e^{\frac{5}{2}}$$

NOTA - Affinche' $f_x(x) \geq 0 \forall x$
deve essere $\alpha \geq 0$. ok!

Dunque:

$$f_x(x) = \begin{cases} 5e^{-5(x-\frac{1}{2})} & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$b) \quad m_x = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} x \cdot 5e^{-5(x-\frac{1}{2})} dx = \left[-x e^{-5(x-\frac{1}{2})} \right]_{\frac{1}{2}}^{+\infty} + \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} e^{-5(x-\frac{1}{2})} dx =$$

$$= \frac{1}{2} + \left[-\frac{e^{-5(x-\frac{1}{2})}}{5} \right]_{\frac{1}{2}}^{+\infty} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$$

$$\sigma_x^2 = E[X^2] - m_x^2 = \frac{53}{100} - \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{53-49}{100} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} x^2 \cdot 5e^{-5(x-\frac{1}{2})} dx = \left[-x^2 e^{-5(x-\frac{1}{2})} \right]_{\frac{1}{2}}^{+\infty} + \frac{2}{5} \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} x \cdot 5e^{-5(x-\frac{1}{2})} dx =$$

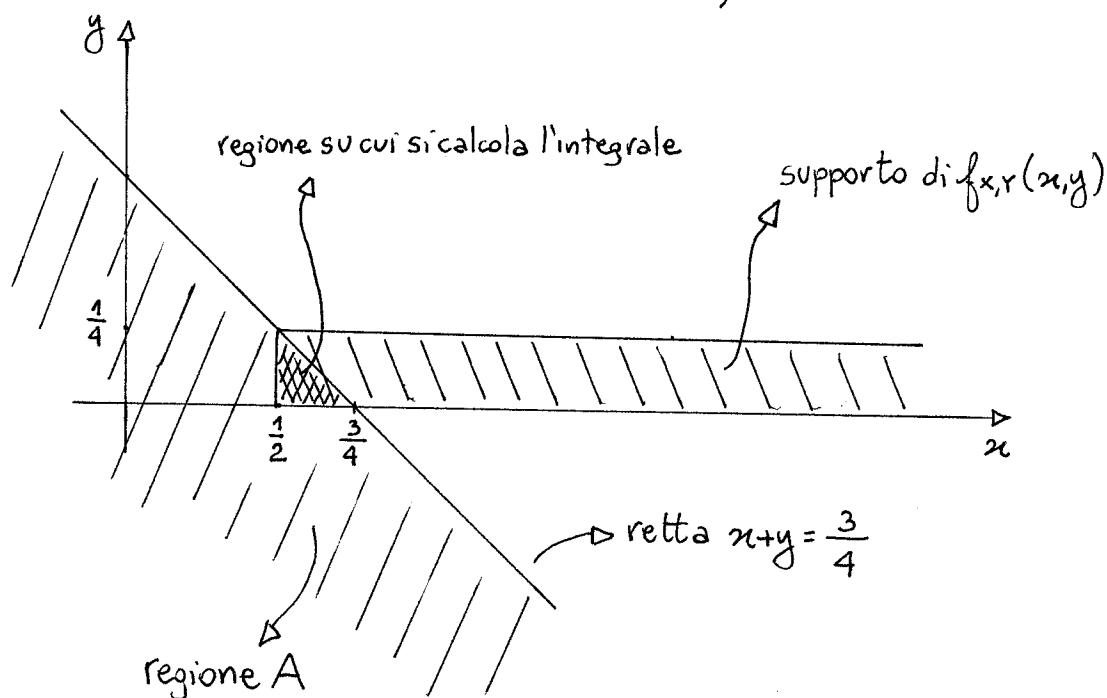
$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{5} m_x = \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{10} = \frac{1}{4} + \frac{7}{25} = \frac{53}{100}$$

$$c) \quad f_y(y) = \begin{cases} 4 & \text{se } 0 \leq y \leq \frac{1}{4} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$d) f_{x,y}(x,y) = f_x(x)f_y(y) = \begin{cases} 20e^{-5(x-\frac{1}{2})} & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \text{ e } 0 \leq y \leq \frac{1}{4} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$e) P(X+Y \leq \frac{3}{4}) = P((X,Y) \in A) = \iint_A f_{x,y}(x,y) dx dy$$

$$\text{dove } A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \leq \frac{3}{4} \right\}$$



Dunque:

$$P(X+Y \leq \frac{3}{4}) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \int_0^{\frac{3}{4}-x} 20e^{-5(x-\frac{1}{2})} dy dx = 20 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} e^{-5(x-\frac{1}{2})} \left[\int_0^{\frac{3}{4}-x} dy \right] dx =$$

$$= 20 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} e^{-5(x-\frac{1}{2})} \left(\frac{3}{4} - x \right) dx = 4 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \left(x - \frac{3}{4} \right) \left[-5e^{-5(x-\frac{1}{2})} \right] dx =$$

$$= 4 \left[\left(x - \frac{3}{4} \right) e^{-5(x-\frac{1}{2})} \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} - 4 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} e^{-5(x-\frac{1}{2})} dx =$$

$$= 4 \left(0 + \frac{1}{4} \right) + \frac{4}{5} \left[e^{-5(x-\frac{1}{2})} \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} = 1 + \frac{4}{5} \left(e^{-\frac{5}{4}} - 1 \right) = \frac{1}{5} \left(1 + 4e^{-\frac{5}{4}} \right)$$

$$\simeq 0.43$$

f) Dato che X e Y sono indipendenti, sono anche scorrelate.
Dunque $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Risulta:

$$\Sigma_{X,Y} = \begin{bmatrix} \text{Var}(X) & \text{Cov}(X,Y) \\ \text{Cov}(X,Y) & \text{Var}(Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & 0 \\ 0 & \frac{1}{192} \end{bmatrix}$$

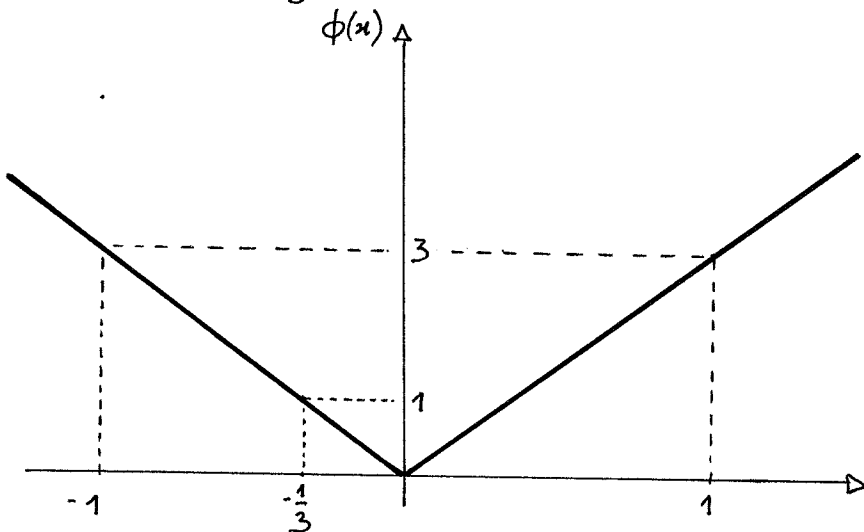
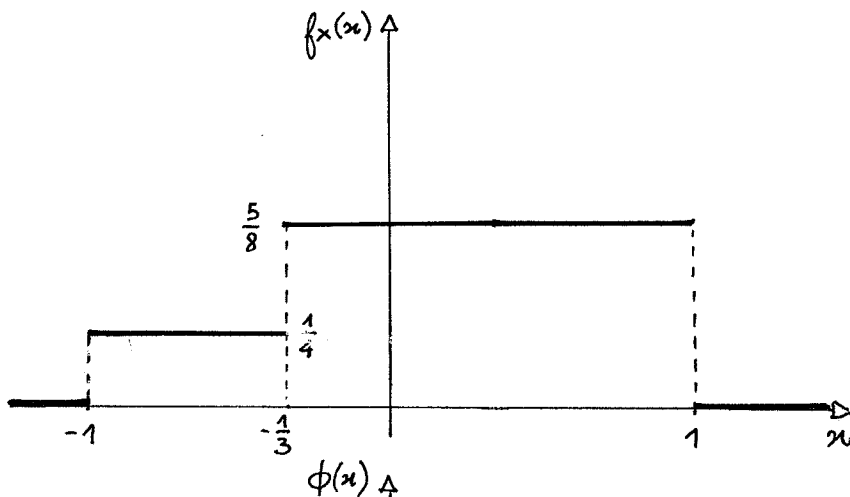
matrice di covarianza
di X e Y

per una v.a. uniforme la varianza
è $\sigma_Y^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(\frac{1}{4})^2}{12} = \frac{1}{192}$

Esercizio 3

a) Dato che viene richiesto il calcolo della funzione di distribuzione di probabilità di Y , conviene calcolarla direttamente.

$$Y = \phi(X) = 3|X|$$



CASO 1 - $y < 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(3|X| \leq y) = 0$$

↳ perché $3|X| \geq 0$ mentre $y < 0$!

CASO 2 - $0 \leq y < 1$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(3|X| \leq y) = P\left(-\frac{y}{3} \leq X \leq \frac{y}{3}\right) =$$

$$= \int_{-\frac{y}{3}}^{\frac{y}{3}} \frac{5}{8} dx = \frac{5}{8} \left[x \right]_{-\frac{y}{3}}^{\frac{y}{3}} = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3} y = \frac{5}{12} y$$

CASO 3 - $1 \leq y \leq 3$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(3|X| \leq y) = P\left(-\frac{y}{3} \leq X \leq \frac{y}{3}\right) =$$

$$= \int_{-\frac{y}{3}}^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{4} dx + \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{y}{3}} \frac{5}{8} dx = \frac{1}{4} \left[x \right]_{-\frac{y}{3}}^{-\frac{1}{3}} + \frac{5}{8} \left[x \right]_{-\frac{1}{3}}^{\frac{y}{3}} =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{y}{3} - \frac{1}{3} \right) + \frac{5}{8} \left(\frac{y}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{7}{24} y + \frac{1}{8}$$

CASO 4 - $y > 3$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(3|X| \leq y) = 1$$

↳ perché $y > 3$, mentre il massimo valore che può assumere $3|X|$ è 3 (il supporto di $f_X(x)$ è l'intervallo $[-1, 1]$).

Ricapitolando:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ \frac{5}{12} y & \text{se } 0 \leq y < 1 \\ \frac{7}{24} y + \frac{1}{8} & \text{se } 1 \leq y \leq 3 \\ 1 & \text{se } y > 3 \end{cases}$$

b) La densità di probabilità di Y è:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} \frac{5}{12} & \text{se } 0 \leq y < 1 \\ \frac{7}{24} & \text{se } 1 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} m_Y &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^1 y \cdot \frac{5}{12} dy + \int_1^3 y \cdot \frac{7}{24} dy = \\ &= \frac{5}{12} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 + \frac{7}{24} \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^3 = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{2} + \frac{7}{24} \cdot \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{5}{24} + \frac{7}{24} \cdot 4 = \frac{33}{24} = \frac{11}{8} \end{aligned}$$

$$\sigma_Y^2 = E[Y^2] - m_Y^2 = \frac{8}{3} - \left(\frac{11}{8} \right)^2 = \frac{8}{3} - \frac{121}{64} = \frac{149}{192}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y) dy &= \int_0^1 y^2 \cdot \frac{5}{12} dy + \int_1^3 y^2 \cdot \frac{7}{24} dy = \\ &= \frac{5}{12} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^1 + \frac{7}{24} \left[\frac{y^3}{3} \right]_1^3 = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{3} + \frac{7}{24} \left(9 - \frac{1}{3} \right) = \\ &= \frac{5}{36} + \frac{7}{24} \cdot \frac{26}{3} = \frac{10 + 182}{72} = \frac{192}{72} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$