

PROVA IN ITINERE DI STATISTICA 24.06.2005

Candidato:

N. Matricola:

Esercizio 1.

In un'urna sono contenute n palline, di cui r sono rosse e le rimanenti sono bianche. Vengono effettuate due estrazioni dall'urna seguendo la regola che, se la prima pallina estratta è bianca, viene rimessa nell'urna (prima di estrarre la seconda), altrimenti viene scartata.

- a) Definire due variabili aleatorie $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ corrispondenti al colore della prima e della seconda pallina estratta, rispettivamente.
- b) Calcolare la densità di probabilità, il valore atteso e la varianza di $\mathbf{Y}$.
- c) Verificare se $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ sono indipendenti.
- d) Assumendo $n = 10$ e $r = 4$, calcolare la probabilità che la prima pallina estratta sia rossa, noto che la seconda pallina estratta è rossa. Confrontare questo valore con la probabilità (*a priori*) che la prima pallina estratta sia rossa, e spiegare il risultato.

Un altro esperimento consiste nell'effettuare una serie di estrazioni dall'urna, rimettendo la pallina estratta nell'urna se essa è bianca, e fermandosi quando si estrae una pallina rossa. Sia $\mathbf{T}$ la variabile aleatoria corrispondente alla durata dell'esperimento.

- e) Qual è la densità di probabilità di $\mathbf{T}$?

Esercizio 2.

Si consideri la funzione:

$$f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x, y) = \begin{cases} cx & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \quad x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

in cui c è una costante reale.

- a) Determinare il valore di c affinché $f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x, y)$ rappresenti una densità di probabilità.

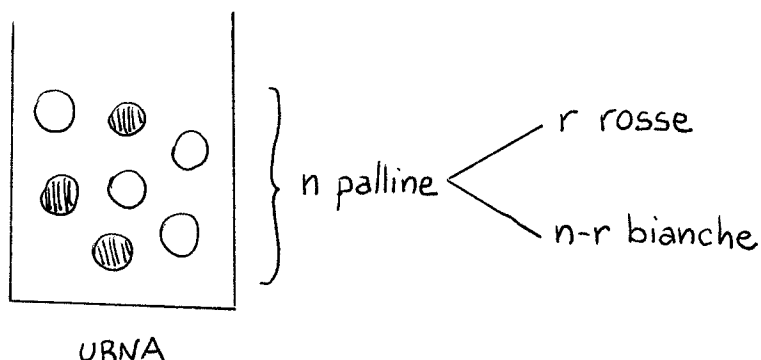
Siano $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ due variabili aleatorie con densità di probabilità $f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x, y)$.

- b) Calcolare le densità di probabilità marginali $f_{\mathbf{X}}(x)$ e $f_{\mathbf{Y}}(y)$ di $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.
- c) Calcolare il valore atteso $m_{\mathbf{X}}$ e la varianza $\sigma_{\mathbf{X}}^2$ di $\mathbf{X}$.
- d) Calcolare il valore atteso $m_{\mathbf{Y}}$ e la varianza $\sigma_{\mathbf{Y}}^2$ di $\mathbf{Y}$.
- e) Stabilire se $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ sono indipendenti e/o scorrelate.
- f) Scrivere la matrice di covarianza di $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.

Esercizio 3.

Si considerino tre variabili aleatorie $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ e $\mathbf{X}_3$ congiuntamente gaussiane e indipendenti, con $E[\mathbf{X}_1] = 1$, $E[\mathbf{X}_2] = -1$, $E[\mathbf{X}_3] = 2$, $\text{Var}(\mathbf{X}_1) = 2$, $\text{Var}(\mathbf{X}_2) = 3$ e $\text{Var}(\mathbf{X}_3) = 1$. Si considerino inoltre le variabili aleatorie $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2 - 2$ e $\mathbf{Y}_2 = -\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + 2\mathbf{X}_3 + 1$.

- a) Qual è la densità congiunta di $\mathbf{Y}_1$ e $\mathbf{Y}_2$?
- b) Calcolare la covarianza di $\mathbf{Y}_1$ e $\mathbf{Y}_2$.

Esercizio 1situazione iniziale (prima delle due estrazioni)

a) Definiamo due v.a.:

$$X = \begin{cases} 0 & \text{se la prima pallina estratta è bianca} \\ 1 & \text{" " " " " " " rossa} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{se la seconda pallina estratta è bianca} \\ 1 & \text{" " " " " " " rossa} \end{cases}$$

b) Convien calcolare subito la densità congiunta di X e Y ,
cioè $p_{X,Y}(x,j) = P(X=x, Y=j)$ per ogni $x, j = 0, 1$.Utilizzando le probabilità condizionali:

$$p_{X,Y}(0,0) = P(X=0, Y=0) = P(X=0)P(Y=0|X=0) = \frac{n-r}{n} \cdot \frac{n-r}{n}$$

$$p_{X,Y}(0,1) = P(X=0, Y=1) = P(X=0)P(Y=1|X=0) = \frac{n-r}{n} \cdot \frac{r}{n}$$

NOTA - Se la prima pallina estratta è bianca ($X=0$), viene rimessa nell'urna, e quindi alla seconda estrazione si hanno ancora n palline di cui r rosse.

$$p_{X,Y}(1,0) = P(X=1, Y=0) = P(X=1)P(Y=0|X=1) = \frac{r}{n} \cdot \frac{n-r}{n-1}$$

$$p_{X,Y}(1,1) = P(X=1, Y=1) = P(X=1)P(Y=1|X=1) = \frac{r}{n} \cdot \frac{r-1}{n-1}$$

NOTA - Se la prima pallina estratta è rossa ($X=1$), non viene rimessa nell'urna, e quindi alla seconda estrazione si hanno $n-1$ palline di cui $r-1$ rosse e $n-r$ bianche.

A questo punto la densità marginale di Y si ottiene dalla densità congiunta di X e Y :

(2)

$$\begin{aligned} p_Y(0) = P(Y=0) &= \sum_{i=0}^1 p_{X,Y}(i,0) = p_{X,Y}(0,0) + p_{X,Y}(1,0) = \left(\frac{n-r}{n}\right)^2 + \frac{r}{n} \frac{n-r}{n-1} = \\ &= \frac{n-r}{n} \left(\frac{n-r}{n} + \frac{r}{n-1} \right) = \frac{n-r}{n} \left[1 + \frac{r}{n(n-1)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_Y(1) = P(Y=1) &= \sum_{i=0}^1 p_{X,Y}(i,1) = p_{X,Y}(0,1) + p_{X,Y}(1,1) = \frac{r}{n} \frac{n-r}{n} + \frac{r}{n} \frac{r-1}{n-1} = \\ &= \frac{r}{n} \left(\frac{n-r}{n} + \frac{r-1}{n-1} \right) = \frac{r}{n} \left[1 - \frac{n-r}{n(n-1)} \right] \end{aligned}$$

Il valore atteso di Y è:

$$E[Y] = \sum_{j=0}^1 j p_Y(j) = 0 \cdot p_Y(0) + 1 \cdot p_Y(1) = p_Y(1)$$

La varianza di Y è:

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= E[Y^2] - E[Y]^2 = \sum_{j=0}^1 j^2 p_Y(j) - p_Y^2(1) = \\ &= 0 \cdot p_Y(0) + 1 \cdot p_Y(1) - p_Y^2(1) = p_Y(1) [1 - p_Y(1)] \end{aligned}$$

c) Calcoliamo anche la densità marginale di X :

$$p_X(0) = P(X=0) = \frac{n-r}{n}$$

$$p_X(1) = P(X=1) = \frac{r}{n}$$

NOTA- Si osserva che $p_X(0) = p_{X,Y}(0,0) + p_{X,Y}(0,1)$ e $p_X(1) = p_{X,Y}(1,0) + p_{X,Y}(1,1)$.

Le v.a. X e Y sono indipendenti se e solo se:

$$p_{X,Y}(i,j) = p_X(i) p_Y(j) \quad \forall i,j=0,1$$

Tuttavia:

$$p_{X,Y}(0,0) = \left(\frac{n-r}{n}\right)^2 \neq \underbrace{\frac{n-r}{n} \cdot \frac{n-r}{n} \left[1 + \frac{r}{n(n-1)} \right]}_{>1} = p_X(0) p_Y(0).$$

Dunque X e Y NON sono indipendenti.

3

d) Viene richiesto di calcolare:

$$P(X=1|Y=1) = \frac{P(X=1, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{P_{X,Y}(1,1)}{P_Y(1)} = \frac{\cancel{\frac{r}{n}} \frac{r-1}{n-1}}{\cancel{\frac{r}{n}} \left[1 - \frac{n-r}{n(n-1)} \right]} = \frac{5}{14} < \frac{2}{5} = \frac{r}{n} = P(X=1)$$

sostituendo
 $n=10$ e $r=4$

Dunque $P(X=1|Y=1) < P(X=1)$.

spiegazione intuitiva

La probabilità che la prima pallina estratta sia rossa è $\frac{r}{n}$.

Se la prima pallina estratta è rossa, allora l'estrazione di una pallina rossa al secondo tentativo risulta meno probabile, perché la probabilità che la seconda pallina estratta sia anch'essa rossa diventa $\frac{r-1}{n-1}$, che è minore di $\frac{r}{n}$.

Invertendo il ragionamento, se è noto che la seconda pallina estratta è rossa, ciò rende meno probabile che la prima pallina estratta sia rossa.

e) L'esperimento può essere visto come uno schema SUCCESSO-INSUCCESSO di Bernoulli, in cui si ha successo quando si estrae una pallina rossa, e la probabilità di successo in ogni singolo tentativo è $p = \frac{r}{n}$.

Dunque la v.a. T ($\equiv$ istante di primo successo) segue una densità geometrica di parametro p :

$$p_T(k) = \begin{cases} p(1-p)^{k-1} & k=1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



SI VEDA LA LEZIONE
DEL 13/05/2005

Esercizio 2.

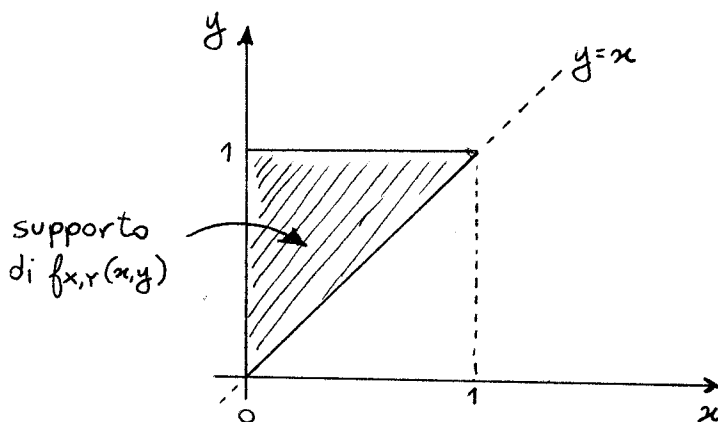
4

$$a) 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy =$$

$$= \int_0^1 \int_x^1 c x dx dy =$$

$$= c \int_0^1 x \left[\int_x^1 dy \right] dx =$$

$$= c \int_0^1 x \left[y \right]_x^1 dx = c \int_0^1 x(1-x) dx = c \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = c \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{c}{6}$$



Dunque, affinché $f_{X,Y}(x,y)$ sia una densità di probabilità, deve essere $\boxed{c=6}$.

b) Calcoliamo la densità marginale di X.

=> SI VEDA LA LEZIONE
DEL 10/06/2005

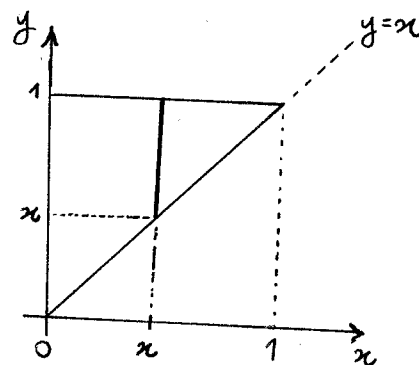
• Se $x < 0$ oppure $x > 1$, allora $f_X(x) = 0$

• Se $0 \leq x \leq 1$:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy =$$

$$= \int_x^1 6x dy = 6x \int_x^1 dy = 6x \left[y \right]_x^1 = 6x(1-x)$$

fissato x , y varia
tra x e 1



Dunque:

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcoliamo la densità marginale di Y:

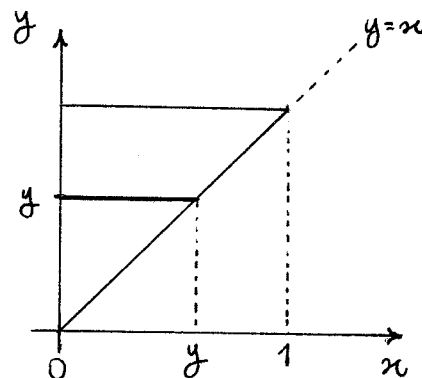
• Se $y < 0$ oppure $y > 1$, allora $f_Y(y) = 0$

• Se $0 \leq y \leq 1$:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx =$$

$$= \int_0^y 6x dx = 6 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^y = 3y^2$$

fissato y , x varia
tra 0 e y



Dunque:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3y^2 & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$c) E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 6x^2(1-x) dx = 6 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 6 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \triangleq m_X$$

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - m_X^2$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 6x^3(1-x) dx = 6 \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = 6 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow \text{Var}(X) = \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20} \triangleq \sigma_X^2$$

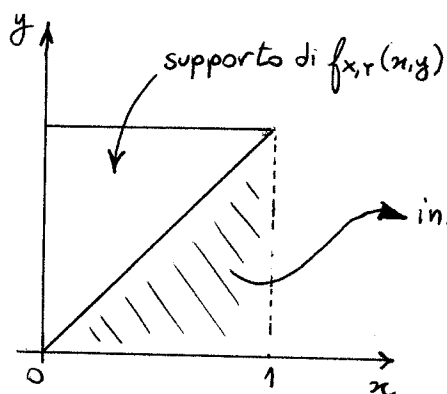
$$d) E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^1 3y^3 dy = 3 \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{4} \triangleq m_Y$$

$$\text{Var}(Y) = E[Y^2] - m_Y^2$$

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y) dy = \int_0^1 3y^4 dy = 3 \left[\frac{y^5}{5} \right]_0^1 = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \text{Var}(Y) = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4} \right)^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80} \triangleq \sigma_Y^2$$

e) Le v.a. X e Y sono indipendenti se e solo se $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tranne al più un insieme di punti di misura nulla



insieme di punti di misura non nulla in cui $f_{X,Y}(x,y) = 0$ mentre $f_X(x) \neq 0$ e $f_Y(y) \neq 0$.

Dunque $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$ su questo insieme, e X e Y non sono indipendenti.

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - m_X m_Y$$

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^y xy \cdot 6x dy dx =$$

$$= 6 \int_0^1 y \left[\int_0^y x^2 dx \right] dy = 6 \int_0^1 y \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^y dy = 6 \int_0^1 \frac{y^4}{3} dy = 2 \left[\frac{y^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{5} - \frac{3}{8} = \frac{1}{40} \neq 0$$

Dato che $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$, X e Y non sono nemmeno scorrelate.

f) La matrice di covarianza di X e Y è:

$$\Sigma_{X,Y} = \begin{bmatrix} \text{Var}(X) & \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(X, Y) & \text{Var}(Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{3}{80} \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3.

Posto $X = (X_1, X_2, X_3)$, si ha che il valore atteso di X è

$m_X = (E[X_1], E[X_2], E[X_3]) = (1, -1, 2)$, mentre la matrice di covarianza di X è:

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} \text{Var}(X_1) & 0 & 0 \\ 0 & \text{Var}(X_2) & 0 \\ 0 & 0 & \text{Var}(X_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↓
NOTA - gli elementi fuori dalla diagonale sono nulli perché X_1, X_2 e X_3 sono a due a due indipendenti, e quindi anche scorrelate.

Posto $Y = (Y_1, Y_2)$, si ha che:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 - X_2 - 2 \\ -X_1 + X_2 + 2X_3 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{ossia } Y = AX + b, \text{ dove } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Dato che X sono congiuntamente gaussiane, e' noto che

$Y = Ax + b$ sono ancora congiuntamente gaussiane, con:



SI VEDA LA LEZIONE
DEL 17/06/2005

- $m_Y = Am_X + b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ - valore atteso di Y

- $\Sigma_Y = A \Sigma_X A^T = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$ - matrice di covarianza di Y

$\Rightarrow Y \sim N(m_Y, \Sigma_Y).$

b) La covarianza di Y_1 e Y_2 e' $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = -5$.