**PROVA IN ITINERE DI STATISTICA 24.06.2005**

**Altri esercizi senza soluzione**

# 1 Primo tipo

**Esercizio** $1b$**.**

In una scatola sono contenuti $n$ pezzi uguali, di cui $d$ sono danneggiati e i restanti sono integri. Un addetto ingenuo preleva due pezzi dalla scatola con l'accortezza che, se il primo pezzo prelevato è difettoso, viene rimesso nella scatola (prima di prelevare il secondo pezzo), altrimenti viene utilizzato.

$a$) Definire due variabili aleatorie $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ corrispondenti all'integrità del primo e del secondo pezzo estratto, rispettivamente.

$b$) Calcolare la densità di probabilità, il valore atteso e la varianza di $\mathbf{Y}$.

$c$) Verificare se $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ sono indipendenti.

$d$) Assumendo $n = 10$ e $d = 6$, calcolare la probabilità che il primo pezzo estratto sia integro, noto che il secondo pezzo estratto è integro. Confrontare questo valore con la probabilità (*a priori*) che il primo pezzo estratto sia integro, e spiegare il risultato.

In un'altra circostanza, lo stesso addetto effettua una serie di prelievi di pezzi dalla scatola, rimettendo il pezzo estratto nella scatola se esso è diffettoso, e fermandosi quando preleva un pezzo integro. Sia $\mathbf{T}$ la variabile aleatoria corrispondente alla durata dell'esperimento.

$e$) Qual è la densità di probabilità di $\mathbf{T}$?

**Esercizio** $1c$**.**

Un mazzo di carte è formato da $n$ carte da gioco, in cui $q$ sono di quadri e le rimanenti sono di cuori. Vengono effettuate due estrazioni dal mazzo seguendo la regola che, se la prima carta estratta è di cuori, viene rimessa a caso nel mazzo (prima di estrarre la seconda), altrimenti viene messa da parte.

$a$) Definire due variabili aleatorie $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ corrispondenti al seme della prima e della seconda carta estratta, rispettivamente.

$b$) Calcolare la densità di probabilità, il valore atteso e la varianza di $\mathbf{Y}$.

$c$) Verificare se $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ sono indipendenti.

*d*) Assumendo $n = 12$ e $q = 8$, calcolare la probabilità che la prima carta estratta sia di quadri, noto che la seconda carta estratta è di quadri. Confrontare questo valore con la probabilità (*a priori*) che la prima carta estratta sia di quadri, e spiegare il risultato.

Un altro esperimento consiste nell'effettuare una serie di estrazioni dal mazzo, rimettendo la carta estratta a caso nel mazzo se essa è di cuori, e fermandosi quando si estrae una carta di quadri. Sia $\mathbf{T}$ la variabile aleatoria corrispondente alla durata dell'esperimento.

*e*) Qual è la densità di probabilità di $\mathbf{T}$?

**Esercizio** $1d$**.**

In un campione di $n$ individui, $a$ individui sono di tipo A e i restanti sono di tipo B. Due individui sono scelti a caso dal campione secondo il criterio che, se il primo individuo scelto è di tipo A, viene reintrodotto nel campione (prima di scegliere il secondo individuo), altrimenti viene scartato.

*a*) Definire due variabili aleatorie $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ corrispondenti al tipo del primo e del secondo individuo scelto, rispettivamente.

*b*) Calcolare la densità di probabilità, il valore atteso e la varianza di $\mathbf{Y}$.

*c*) Verificare se $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ sono indipendenti.

*d*) Assumendo $n = 12$ e $a = 4$, calcolare la probabilità che il primo individuo scelto sia di tipo B, noto che il secondo individuo scelto è di tipo B. Confrontare questo valore con la probabilità (*a priori*) che il primo individuo scelto sia di tipo B, e spiegare il risultato.

In un'altra selezione, si effettua una serie di scelte a caso di individui dal campione, reintroducendo l'individuo nel campione se esso è di tipo A, e fermandosi quando viene scelto un individuo di tipo B. Sia $\mathbf{T}$ la variabile aleatoria corrispondente alla durata dell'esperimento.

*e*) Qual è la densità di probabilità di $\mathbf{T}$?

# 2 Secondo tipo

**Esercizio** $2b$**.**

Si consideri la funzione:

$$f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x, y) = \begin{cases} cy & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \quad x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

in cui $c$ è una costante reale.

*a*) Determinare il valore di $c$ affinché $f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x, y)$ rappresenti una densità di probabilità.

Siano $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ due variabili aleatorie con densità di probabilità $f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x, y)$.

*b*) Calcolare le densità di probabilità marginali $f_{\mathbf{X}}(x)$ e $f_{\mathbf{Y}}(y)$ di $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.

*c*) Calcolare il valore atteso $m_{\mathbf{X}}$ e la varianza $\sigma^2_{\mathbf{X}}$ di $\mathbf{X}$.

*d*) Calcolare il valore atteso $m_{\mathbf{Y}}$ e la varianza $\sigma^2_{\mathbf{Y}}$ di $\mathbf{Y}$.

*e*) Stabilire se $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ sono indipendenti e/o scorrelate.

*f*) Scrivere la matrice di covarianza di $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.

**Esercizio** $2c$**.**

Si consideri la funzione:

$$f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x, y) = \begin{cases} cx & \text{se } y \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

in cui $c$ è una costante reale.

*a*) Determinare il valore di $c$ affinché $f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x, y)$ rappresenti una densità di probabilità.

Siano $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ due variabili aleatorie con densità di probabilità $f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x, y)$.

*b*) Calcolare le densità di probabilità marginali $f_{\mathbf{X}}(x)$ e $f_{\mathbf{Y}}(y)$ di $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.

*c*) Calcolare il valore atteso $m_{\mathbf{X}}$ e la varianza $\sigma^2_{\mathbf{X}}$ di $\mathbf{X}$.

*d*) Calcolare il valore atteso $m_{\mathbf{Y}}$ e la varianza $\sigma^2_{\mathbf{Y}}$ di $\mathbf{Y}$.

*e*) Stabilire se $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ sono indipendenti e/o scorrelate.

*f*) Scrivere la matrice di covarianza di $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.

**Esercizio** $2d$**.**

Si consideri la funzione:

$$f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x, y) = \begin{cases} cy & \text{se } y \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

in cui $c$ è una costante reale.

*a*) Determinare il valore di $c$ affinché $f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x, y)$ rappresenti una densità di probabilità.

Siano $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ due variabili aleatorie con densità di probabilità $f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x, y)$.

*b*) Calcolare le densità di probabilità marginali $f_{\mathbf{X}}(x)$ e $f_{\mathbf{Y}}(y)$ di $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.

*c*) Calcolare il valore atteso $m_{\boldsymbol{X}}$ e la varianza $\sigma_{\boldsymbol{X}}^2$ di $\mathbf{X}$.

*d*) Calcolare il valore atteso $m_{\boldsymbol{Y}}$ e la varianza $\sigma_{\boldsymbol{Y}}^2$ di $\mathbf{Y}$.

*e*) Stabilire se $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ sono indipendenti e/o scorrelate.

*f*) Scrivere la matrice di covarianza di $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.

# 3 Terzo tipo

**Esercizio** 3*b*.

Si considerino tre variabili aleatorie $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ e $\mathbf{X}_3$ congiuntamente gaussiane e indipendenti, con $\mathrm{E}[\mathbf{X}_1] = -1$, $\mathrm{E}[\mathbf{X}_2] = 0$, $\mathrm{E}[\mathbf{X}_3] = 1$, $\mathrm{Var}(\mathbf{X}_1) = 1$, $\mathrm{Var}(\mathbf{X}_2) = 4$ e $\mathrm{Var}(\mathbf{X}_3) = 3$. Si considerino inoltre le variabili aleatorie $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{X}_2 + 2\,\mathbf{X}_3 - 1$ e $\mathbf{Y}_2 = 2\,\mathbf{X}_1 + \frac{1}{2}\,\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_3 + 1$.

*a*) Qual è la densità congiunta di $\mathbf{Y}_1$ e $\mathbf{Y}_2$?

*b*) Calcolare la covarianza di $\mathbf{Y}_1$ e $\mathbf{Y}_2$.

**Esercizio** 3*c*.

Si considerino tre variabili aleatorie $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ e $\mathbf{X}_3$ congiuntamente gaussiane e indipendenti, con $\mathrm{E}[\mathbf{X}_1] = 0$, $\mathrm{E}[\mathbf{X}_2] = -2$, $\mathrm{E}[\mathbf{X}_3] = 1$, $\mathrm{Var}(\mathbf{X}_1) = 4$, $\mathrm{Var}(\mathbf{X}_2) = 1$ e $\mathrm{Var}(\mathbf{X}_3) = 2$. Si considerino inoltre le variabili aleatorie $\mathbf{Y}_1 = -\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2 + 2\,\mathbf{X}_3 - 2$ e $\mathbf{Y}_2 = 2\,\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_3 + 1$.

*a*) Qual è la densità congiunta di $\mathbf{Y}_1$ e $\mathbf{Y}_2$?

*b*) Calcolare la covarianza di $\mathbf{Y}_1$ e $\mathbf{Y}_2$.

**Esercizio** 3*d*.

Si considerino tre variabili aleatorie $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ e $\mathbf{X}_3$ congiuntamente gaussiane e indipendenti, con $\mathrm{E}[\mathbf{X}_1] = -2$, $\mathrm{E}[\mathbf{X}_2] = 1$, $\mathrm{E}[\mathbf{X}_3] = -1$, $\mathrm{Var}(\mathbf{X}_1) = 3$, $\mathrm{Var}(\mathbf{X}_2) = 2$ e $\mathrm{Var}(\mathbf{X}_3) = 1$. Si considerino inoltre le variabili aleatorie $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_3 - 2$ e $\mathbf{Y}_2 = -2\,\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_3 - 3$.

*a*) Qual è la densità congiunta di $\mathbf{Y}_1$ e $\mathbf{Y}_2$?

*b*) Calcolare la covarianza di $\mathbf{Y}_1$ e $\mathbf{Y}_2$.