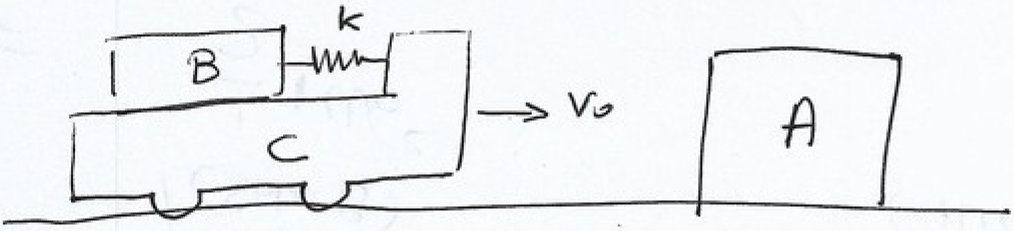
Fisica 1 - 17 Settembre 2019 - Esercizio 1



@$t=0$ avviene un urto tra A e C.
Si generano forze impulsive tra A e C. Il corpo ~~B~~ B è escluso da questo processo!

Questo significa che:

- La quantità di moto del sistema A+C si conserva.

$$p_{A+C}\text{prima} = p_{A+C}\text{dopo}$$

$$3M\cdot v_0 + 6M\cdot 0 = 3M\cdot v_C + 6M\, v_A$$

$$\boxed{v_0 = v_C + 2v_A}$$

$$K_{A+C}\text{ prima} = K_{A+C}\text{ dopo}$$

$$\frac{1}{2}3M\, v_0^2 + \frac{1}{2}6M\cdot 0^2 = \frac{1}{2}3M\, v_C^2 + \frac{1}{2}6M\, v_A^2$$

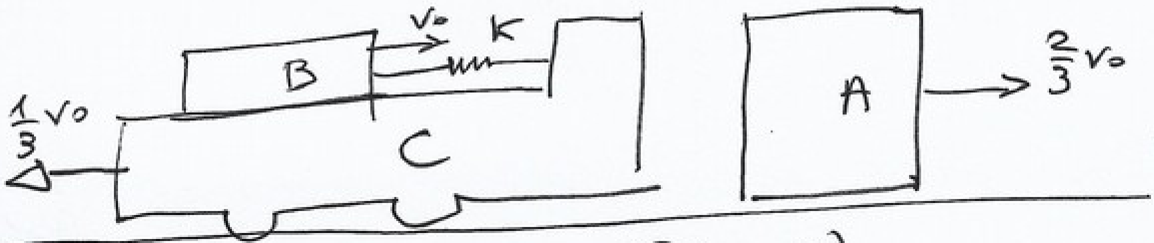
$$\boxed{v_0^2 = v_C^2 + 2v_A^2}$$

Da questo sistema, si ricava che:

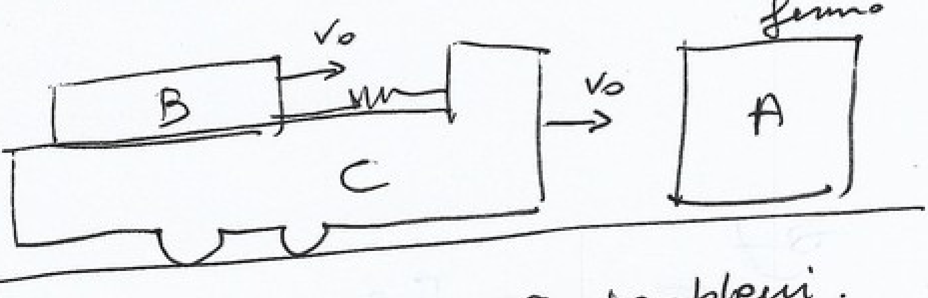
$$\boxed{\begin{array}{l} v_A = \frac{2}{3}v_0 \\ v_C = -\frac{1}{3}v_0 \end{array}}$$

Poiché B non è stato coinvolto nell'urto, allora la velocità di B dopo l'urto non cambia.

Situazione dopo l'urto (@ $t=0^+$)



Situazione prima dell'urto (@ $t=0^-$)



Dopo l'urto, si presentano 2 problemi.

Problema 1 "Quanto spazio percorre A, prima di fermarsi?"

Sappiamo che A è soggetto ad attrito dinamico. Per cui, dobbiamo risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} 6M\ddot{x}_A = -\mu_D 6Mg \\ x_A(0) = 0 \\ \dot{x}_A(0) = \frac{2}{3}v_0 \end{cases}$$

Si tratta di moto uniformemente accelerato, per cui:

$$x_A(t) = \frac{2}{3}v_0 t - \frac{1}{2}\mu_D g t^2$$

$$\dot{x}_A(t) = \frac{2}{3}v_0 - \mu_D g t$$

Sia t_1 l'istante in cui A si ferma:

$$\dot{x}_A(t_1) = \frac{2}{3}v_0 - \mu_0 g t_1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{2 v_0}{3 \mu_0 g}}$$

Lo spazio percorso da 0 a t_1 è:

$$x_A(t_1) = \frac{2}{3}v_0 t_1 - \frac{1}{2}\mu_0 g\, t_1^2 =$$

$$= \frac{2}{3}v_0 \, \frac{2}{3}\frac{v_0}{\mu_0 g} - \frac{1}{2}\mu_0 g \, \frac{4 v_0^2}{9 \mu_0^2 g^2} =$$

$$= \frac{4 v_0^2}{9 \mu_0 g} - \frac{1}{2}\,\frac{4 v_0^2}{9 \mu_0 g} = \boxed{\frac{2}{9}\frac{v_0^2}{\mu_0 g}}.$$

Problema 2: "Dopo l'urto, a quali istanti la molla è massimamente compressa? Qual è la max energia cinetica di B, dopo l'urto?".

Il sistema B+C, dopo l'urto, si ~~muove~~ comporta come un sistema massa – molla – massa –

Siano x_{CDM} e x_M la posizione del CDM e l'allungamento della molla, rispettivamente.

Valgono le seguenti ~~aten~~ equazioni del moto:

$$\ddot{x}_{CDM} = 0$$

$$\ddot{x}_M = -\frac{K}{\mu} x_M, \quad \text{con } \mu = \frac{M \cdot 3M}{M + 3M} = \frac{3}{4}M.$$

Breve ripasso - sistema massa - molla - massa.

$$x_{CDM} = \frac{M x_B + 3M x_C}{M+3M} \qquad x_B = x_{CDM} - \frac{\mu}{M} x_M$$

$$x_M = x_C - x_B \qquad x_C = x_{CDM} + \frac{\mu}{3M} x_M$$

CDM e allungamento molla in funzione della posizione dei corpi

Posizione dei corpi in funzione del CDM e dell'allungamento della molla.

È più semplice lavorare con x_{CDM} e x_M piuttosto che con x_B ed x_C.

[Si veda il materiale della lezione 9 (31/05/2019)]

Devo risolvere i seguenti problemi di Cauchy.

① $$\begin{cases} \ddot{x}_{CDM} = 0 \\ x_{CDM}(0) = \dfrac{M x_B(0) + 3M \cdot x_C(0)}{M+3M} = \dfrac{M \cdot 0 + 3M \cdot 0}{M+3M} \overset{*}{=} 0 \\ \dot{x}_{CDM}(0) = \dfrac{M \dot{x}_B(0) + 3M \dot{x}_C(0)}{M+3M} = \dfrac{M \cdot V_0 + 3M\left(-\frac{V_0}{3}\right)}{M+3M} = 0 \end{cases}$$

② $$\begin{cases} \ddot{x}_M = -\Omega^2 x_M \quad , \text{ con } \Omega^2 = \dfrac{K}{\mu} = \dfrac{4K}{3M} \\ x_M(0) = x_C(0) - x_B(0) = 0 - 0 = 0 \quad * \\ \dot{x}_M(0) = \dot{x}_C(0) - \dot{x}_B(0) = -\dfrac{V_0}{3} - V_0 = -\dfrac{4}{3} V_0. \end{cases}$$

* Si assume che all'inizio $x_B(0) = x_C(0) = 0$. Infatti la molla è inizialmente a riposo.

Problema di Cauchy ①

$x_{CDM}(t) = 0 \quad , \quad \dot{x}_{CDM}(t) = 0$

$\Rightarrow$ Il CDM rimane fermo!

Problema di Cauchy ②

$$x_M(t) = \frac{-\frac{4}{3}V_0}{\Omega} \sin(\Omega t) = -\frac{4}{3}V_0\sqrt{\frac{3M}{4K}}\sin(\Omega t) =$$

$$= -V_0\sqrt{\frac{4M}{3K}}\sin(\Omega t).$$

$$\dot{x}_M(t) = -V_0\sqrt{\frac{4M}{3K}}\,\Omega\cos(\Omega t) = -\frac{4}{3}V_0\cos(\Omega t).$$

La molla è massimamente compressa quando:

$$x_M(t) = -V_0\sqrt{\frac{4M}{3K}}$$

(ovvero quando la ampiezza della legge oraria è massimamente negativa).

$$-V_0\sqrt{\frac{4M}{3K}}\sin(\Omega t) = -V_0\sqrt{\frac{4M}{3K}}$$

$$\sin(\Omega t) = 1$$

$$\Omega t = \frac{\pi}{2} + m2\pi \qquad m \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{t = \frac{1}{\Omega}\left(\frac{\pi}{2} + m2\pi\right)}.$$

Si noti che:

$$x_B(t) = x_{CM}(t) - \frac{\mu}{M}\, x_M(t) \qquad \text{(vedi pag. 4).}$$

$$\Rightarrow \dot{x}_B(t) = \dot{x}_{CM}(t) - \frac{\mu}{M}\, \dot{x}_M(t)$$

$$= 0 - \frac{3M}{4M}\left(-\frac{4}{3} v_0 \cos\Omega t\right)$$

$$= v_0 \cos\Omega t.$$

$\Rightarrow$ Massima velocità di B: v_0!

(Ovvio anche senza calcoli. Infatti si conserva l'energia meccanica. Bastava notare che, all'inizio, l'energia potenziale era nulla e la cinetica di B doveva essere massima...).

$\Rightarrow$ Energia massima di B:

$$\boxed{\frac{1}{2} M v_0^2}$$