

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 2 del 20 Settembre 2018

Esercizio 3

Un lungo conduttore cilindrico ha l'asse coincidente con l'asse z di un sistema di coordinate cartesiane. Esso ha raggio R e dentro di esso scorre corrente con una densità disuniforme, descritta dalla relazione $J(r) = J_0(1 + r/R)$, dove r è la distanza dall'asse z . Calcolare il campo magnetico $\underline{B}$ nel punto di coordinate $P = (R, 0, 3R)$ e stabilire quanto vale l'integrale di linea di $\underline{B}$ lungo il segmento di retta avente per estremi P e $Q = (2R, 2R, 2R)$.

$$J(r) = J_0 \left(1 + \frac{r}{R} \right)$$

Corrente che attraversa il cilindro:

$$\begin{aligned} i &= \int_S J dS \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{p.d.ori}}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^R J_0 \left(1 + \frac{r}{R} \right) r dr d\theta \\ &= J_0 \int_0^{2\pi} d\theta \left[\int_0^R r dr + \int_0^R \frac{r^2}{R} dr \right] = \\ &= J_0 2\pi \left[\frac{R^2}{2} + \frac{R^3}{3R} \right] = \\ &= J_0 2\pi \frac{5}{6} R^2 = J_0 \pi \frac{5}{3} R^2. \end{aligned}$$

Campo in P

• P è a distanza R dal centro.

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 i$$

$$\begin{aligned} B(P) \cdot 2\pi R &= \mu_0 i \quad \Rightarrow B(P) = \frac{\mu_0 J_0 \pi \frac{5}{3} R^2}{2\pi R} \\ &= \mu_0 J_0 \frac{5}{6} R. \end{aligned}$$

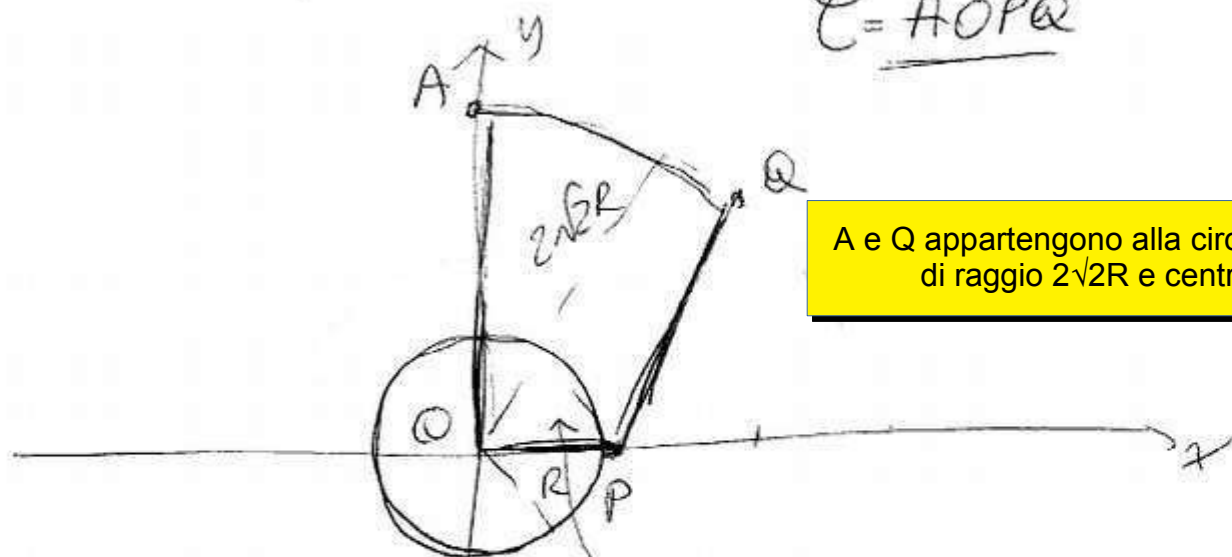
Campo in Q

• Q è a distanza $\sqrt{(2R)^2 + (2R)^2} = \sqrt{8R^2} = 2\sqrt{2}R$ dal centro.

$$\Rightarrow B(Q) = \frac{\mu_0 J_0 \frac{5}{3} R^2}{2\pi \cdot 2\sqrt{2}R} = \mu_0 J_0 \frac{5}{12\sqrt{2}} = \frac{\mu_0 J_0 5\sqrt{2}}{24}.$$

Consideriamo il seguente percorso chiuso
(mettiamo 2 perché siamo in simm. cilindrica):

$$C = AOPQ$$



A e Q appartengono alla circonferenza di raggio $2\sqrt{2}R$ e centro O.

Per la legge di Ampere:

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \cdot \left(\frac{1}{4} i \right)$$

Inoltre:

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \int_{AO} \vec{B} d\vec{l} + \int_{OP} \vec{B} d\vec{l} + \int_{PQ} \vec{B} d\vec{l} + \int_{QA} \vec{B} d\vec{l}$$

Notare che:

- $\int_{AO} \vec{B} d\vec{l} = 0$. Infatti, il campo è sempre ortogonale ad AO.
- $\int_{OP} \vec{B} d\vec{l} = 0$ Come sopra.
- $\int_{QA} \vec{B} d\vec{l} = B(Q) \cdot \widehat{AQ}$. Infatti, il campo è tangente in tutti i punti dell'arco $\widehat{AQ}$.

Quindi

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \int_{PA} \vec{B} d\vec{l} + \int_{QA} \vec{B} d\vec{l} \Rightarrow$$

$$\mu_0 \frac{1}{4} i = \int_{PA} \vec{B} d\vec{l} + B(Q) \widehat{AQ}$$

$$\Rightarrow \int_{PA} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \frac{1}{4} i - B(Q) \widehat{AQ}$$

Integrale di linea richiesto!

Notare che, poiché Q sta sulle bisettrice
del 1° quadrante, l'angolo formato
è $\frac{\pi}{4}$. Quindi:

$$\widehat{AQ} = 2\sqrt{2}R \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{PA} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \frac{i}{4} - B(Q) \frac{\sqrt{2}R\pi}{2}$$