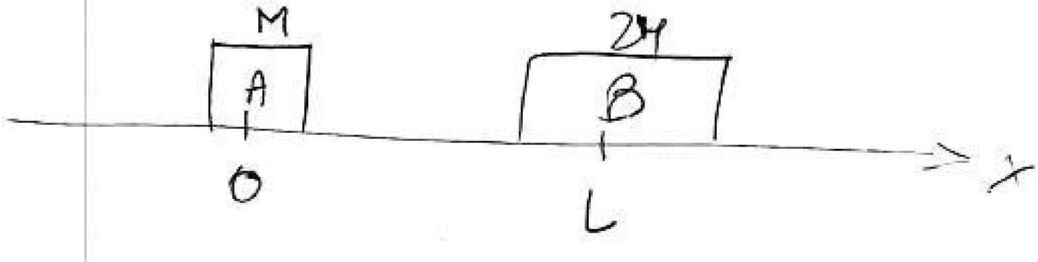
5 Settembre 2018 - Esercizio I - Fisica I



Eq. moto A

$$M\ddot{x}_A = F_0 \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)$$

Omogenea: $M\ddot{x}_A = 0 \Rightarrow \cancel{M}D^2 = 0 \Rightarrow D_1 = D_2 = 0$

Non omogenea: $\sin(\omega t)$ e $\cos(\omega t)$ "portano" 2 nuovi zeri al polinomio caratteristico.

$$D_{3,4} = \pm i\omega$$

Nel nostro caso, $\omega = \frac{\pi}{T}$.

Soluzione:

$$x_A(t) = \underbrace{A + Bt}_{D_1=D_2=0} + \underbrace{C\cos\omega t + D\sin\omega t}_{D_{3,4}=\pm i\omega}$$

$$\dot{x}_A(t) = B - C\omega \sin\omega t + D\omega \cos\omega t$$

$$\ddot{x}_A(t) = -C\omega^2 \cos\omega t - D\omega^2 \sin\omega t.$$

Sostituisco:

$$M(-C\omega^2 \cos\omega t - D\omega^2 \sin\omega t) = F_0 \sin\omega t$$

Da cui:

$$\begin{cases} -MC\omega^2 = 0 \\ -MD\omega^2 = F_0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ D = -\dfrac{F_0}{M\omega^2}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_A(t) = A + Bt - \frac{F_0}{M\omega^2} \sin\omega t$$

$$\dot{x}_A(t) = B - \frac{F_0}{M\omega} \cos\omega t$$

$$x_A(0) = 0 \Longrightarrow A + B \cdot 0 - \frac{F_0}{M\omega^2} \sin\omega \cdot 0 = A = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{A = 0}$$

$$\dot{x}_A(0) = B - \frac{F_0}{M\omega} \cos\omega \cdot 0 = B - \frac{F_0}{M\omega} = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{B - \frac{F_0}{M\omega}}$$

Quindi:

$$\boxed{x_A(t) = \frac{F_0}{M\omega} t - \frac{F_0}{M\omega^2} \sin\omega t}$$

Per il corpo B

$$2M\ddot{x}_B = F_0 \sin\omega t$$ Risolvo usando i risultati ottenuti per A.

$$x_B(t) = A + Bt - \frac{F_0}{2M\omega^2}\sin\omega t$$

$$\dot{x}_B(t) = B - \frac{F_0}{2M\omega}\cos\omega t$$

$$x_B(0) = A + B\cdot 0 - \frac{F_0}{2M\omega^2}\sin\omega\cdot 0 = \boxed{A = L}$$

$$\dot{x}_B(0) = B - \frac{F_0}{2M\omega} = 0 \Rightarrow \boxed{B = \frac{F_0}{2M\omega}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_B(t) = L + \frac{F_0}{2M\omega}t - \frac{F_0}{2M\omega^2}\sin\omega t}$$

Lavoro

Complicato risolvere

$$W = \int F\,dx = \int F v\,dt$$

Infatti, dovrò avere a che fare con l'integrale di $\int \sin^2\omega t\,dt$, $\int t\sin\omega t\,dt$.

Invece, sfrutto il teorema dell'energia cinetica:

$$\boxed{W = K_f - K_i}$$

$$W_A = K_{fA} - K_{iA}$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{x}_A^2 - 0.$$

$$\dot{x}_A^2(T) = \left[\frac{F_0}{M\omega} - \frac{F_0}{M\omega}\cos\omega T\right]^2 = \frac{F_0^2}{M^2\omega^2}\left[1 - \cos\frac{2\pi}{\cancel{T}}\cancel{T}\right]^2 = \frac{4F_0^2}{M^2\omega^2}.$$

Nota: la forza agisce fino a T

$$W_A = \frac{1}{2}\cancel{M}\frac{4F_0^2}{M^{\cancel{2}}\omega^2} = \frac{2F_0^2}{M\omega^2}.$$

Per B... $W_B = \dfrac{2F_0^2}{2M\omega^2} = \dfrac{F_0^2}{M\omega^2}.$