Un chiarimento sul primo esercizio dell'appello di Fisica 1 del 23 giugno 2017 tratto da una email.

Salve,
Le scrivo poiché non sono sicuro di aver capito bene un passaggio nell'esercizio 1 dello scorso appello: in base a quale ragionamento posso dire che il mio carrello si fermerà e tornerà indietro? Mi torna che il moto del carrello può essere visto come quello di una pallina dentro una "buca", ma perché dovrebbe fermarsi? Perchè c'è la forza di richiamo generata dal potenziale? Se non ci fosse stata, il carrello sarebbe andato all'infinito? E perché il professore lo deduce parlando del fatto che "l'energia potenziale diverge positivamente"?
Spero di essere stato chiaro.

Risposta

"E perché il professore lo deduce parlando del fatto che "l'energia potenziale diverge positivamente"?"

Il prof. fà un discorso puramente di tipo energetico, che provo a spiegare meglio.
Supponiamo di partire in $x = 0$ con velocità iniziale $v_0 > 0$. Questo vuol dire che in questo punto ho solo energia cinetica e niente energia potenziale. In formule:

$$U_0 = 0, K_0 > 0.$$

Consideriamo un'altro punto, x_1, tale per cui la velocità è nulla Questo vorrebbe dire che:

$$U_1 \neq 0, K_1 = 0.$$

Quindi, per il principio di conservazione dell'energia meccanica abbiamo che:

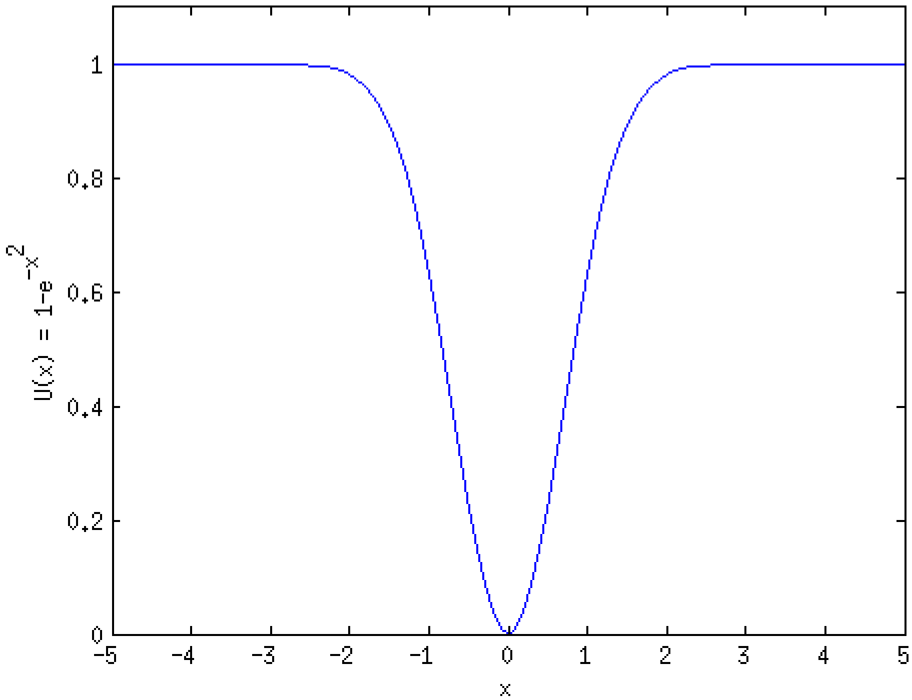
$$K_0 = U_1.$$

Da notare che $K_0 > 0$, mentre ho scritto che $U_1 \neq 0$. Infatti, non è detto che il potenziale sia positivo! Questo vuol dire che la precedente equazione ($K_0 = U_1$) non è sempre soddisfatta, ma dipende da come è fatto il potenziale.
Più in particolare, l'equazione è la seguente:

$$U(x_1) = K_0 > 0.$$

Cercare di risolvere questa equazione in x_1 significa quindi trovare quel punto nello spazio tale per cui la velocità del corpo è nulla.
Consideriamo ora questo potenziale:

$$U(x) = 1 - e^{-x^2}.$$



Supponiamo inoltre che $K_0 = 2$. Domanda: E' possibile risolvere l'equazione $U(x_1) = K_0$? Ovviamente, no, infatti il potenziale non supera mai il valore 1 (vedi figura sopra).
Dunque, in questo caso non è detto che il potenziale sia sempre in grado di fermare il moto del corpo. Se K_0 fosse stato pari a 0.5, allora si, avrei potuto trovare in punto x_1 in cui il corpo si ferma. Invece, se $U(x)$ fosse stata una funzione che "**diverge positivamente**", sicuramente, per ogni K_0, avrei potuto trovare un valore di $U(x_1)$ uguale a K_0.

Ragionamento con le forze

Riprendiamo l'esempio precedente con $U(x) = 1 - e^{-x^2}$. Nota che per valori di x molto grandi (diciamo $x > 2$), la funzione $U(x)$ è piatta. Dunque per valori di x molto grandi, la derivata di $U(x)$ è sempre più vicina a 0. Siccome la forza che agisce sul corpo è pari alla derivata di U cambiata di segno, è chiaro che allontanandoci troppo, la forza che deve frenare sarà sempre più blanda e non riuscirà a fermare il corpo. Questo ragionamento è molto simile all'idea di "velocità di fuga" dei satelliti: se sparo troppo forte il satellite (quindi gli do troppa energia cinetica), ci sta che dopo un pò l'energia potenziale gravitazionale (e quindi la forza gravitazionale) non sia sufficiente a tenere l'oggetto in orbita, e l'oggetto si muoverà nello spazio profondo. Se il potenziale fosse stato divergente positivamente, allora non ci sarebbero questi problemi! Un potenziale divergente positivamente significa che, più mi allontano, maggiore sarà la forza di richiamo.

Quindi in realtà, parlare di potenziale o di forza di richiamo, come vedi, è la stessa cosa. Generalemente è + corretto parlare di forza, ma quando tali forza sono anche conservative, è più semplice ragionare con i potenziali.

"diverge positivamente"...

La parola positivamente è importante. Consideriamo la famiglia di potenziali divergenti $U(x) = \alpha x^n$.

con $\alpha > 0$.
E' chiaro che, se n è pari, allora $U(x)$ è positivamente divergente sia per valori positivi che per valori negativi di x.

Inoltre, la forza associata è

$$F(x) = -\alpha n x^{n-1}.$$

La forza è quindi negativa per $x > 0$ (è una forza che richiama il corpo verso sinistra), ed è positiva per $x < 0$ (è una forza che richiama il corpo verso destra).
Se invece n è dispari, (ad esempio 3), il potenziale è sempre divergente, ma stavolta:
- è divergente positivamente per $x > 0$
- è divergente negativamente per $x < 0$

La forza è

$$F(x) = -\alpha n x^{n-1}$$

e stavolta abbiamo che:
- la forza è negativa per x>0 (è una forza che richiama il corpo verso sinistra)
- la forza è negativa anche per x<0 (è una forza che spinge il corpo verso sinistra)

Dunque con il potenziale cubico il corpo si sarebbe mosso indefinitamente verso -infinito.