

Compito di Fisica 1 del 22 Gennaio 2016 - Esercizio 2

Se il corpo forato ha massa M ,
allora la sua densità è:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi(3R)^2 h - \pi R^2 h} = \frac{M}{\pi 8R^2 h}$$

Considero un cilindro "pieno" di raggio $3R$.
La sua massa è

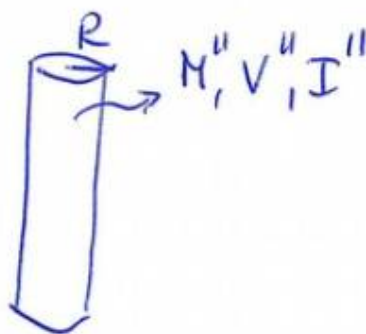
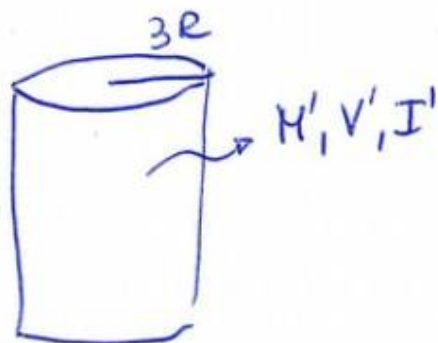
$$M' = \rho V' = \frac{M}{\pi 8R^2 h} \cdot \pi (3R)^2 h = \frac{9}{8} M \Rightarrow I' = \frac{1}{2} M' (3R)^2 = \frac{1}{2} \frac{9}{8} M 9R^2 = \frac{81}{16} M R^2$$

Considero un cilindro "pieno" di raggio R .
La sua massa è:

$$M'' = \rho V'' = \frac{M}{\pi 8R^2 h} \pi R^2 h = \frac{M}{8}$$

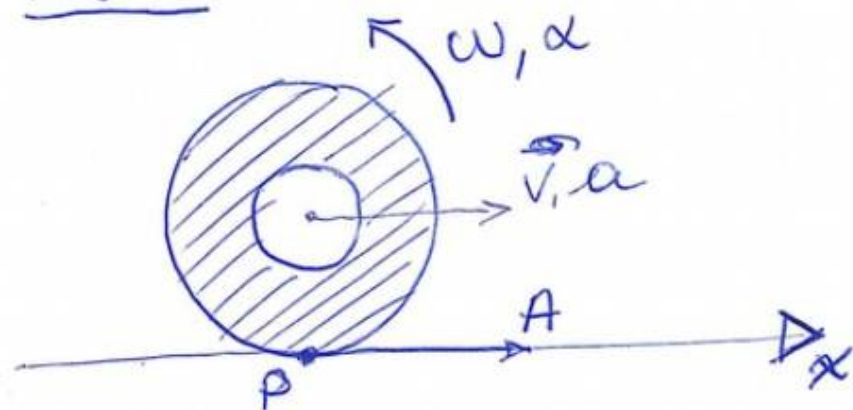
$$I'' = \frac{1}{2} M'' R^2 = \frac{1}{2} \frac{M}{8} R^2 = \frac{MR^2}{16}$$

$$I = I' - I'' = \frac{81}{16} MR^2 - \frac{MR^2}{16} = \frac{80}{16} MR^2 = 5MR^2$$



(1)

Moto...



sceglia la
direzione
della $x...$

ω : velocità angolare

α : acc. angolare ($\alpha = \dot{\omega}$)

v : velocità CDM

a : acc. CDM ($a = \dot{v}$)

P : punto di contatto

A : forza di attrito.

v_p : velocità punto di contatto

NOTA

Fisso l'asse x
e disegno v, a
e A che puntano
verso dx.

Se dai calcoli
otteni che
 $A < 0$, allora vuol
dire che A punta
verso sinistra.
Stesso vale per v ed a

Visto che il corpo striscia, sappiamo che

$$|A| = \mu_0 Mg$$

Come detto prima,
il segno più dice la
direzione.

Inoltre sappiamo che:

$$v_p = v + 3R\omega$$

Velocità del
punto di contatto

NOTA Se avessimo avuto puro rotolamento, allora
 $v_p = 0 \Rightarrow v + 3R\omega = 0 \dots$

Facciamo un'ipotesi:

"P si muove verso destra" $\Rightarrow V_P > 0$

Se questo è vero, allora A si deve opporre al moto, quindi $A < 0$. Da cui:

$$\begin{cases} Ma = -\mu_0 Mg \\ I\alpha = -3R\mu_0 Mg \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = -\mu_0 g \\ \alpha = -\frac{3}{5} \frac{\mu_0 g}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(t) = -\mu_0 g t \\ \omega(t) = \omega_0 - \frac{3}{5} \frac{\mu_0 g}{R} t \end{cases}$$

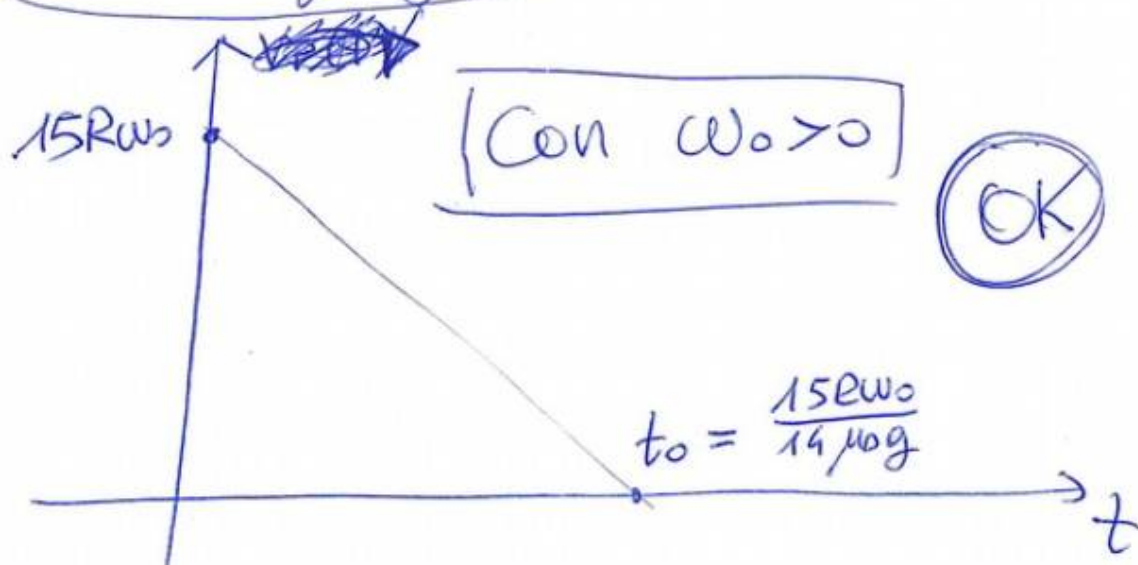
L'ipotesi di partenza è $V_P > 0$, dunque

$$V_P(t) = v(t) + 3R\omega(t) > 0$$

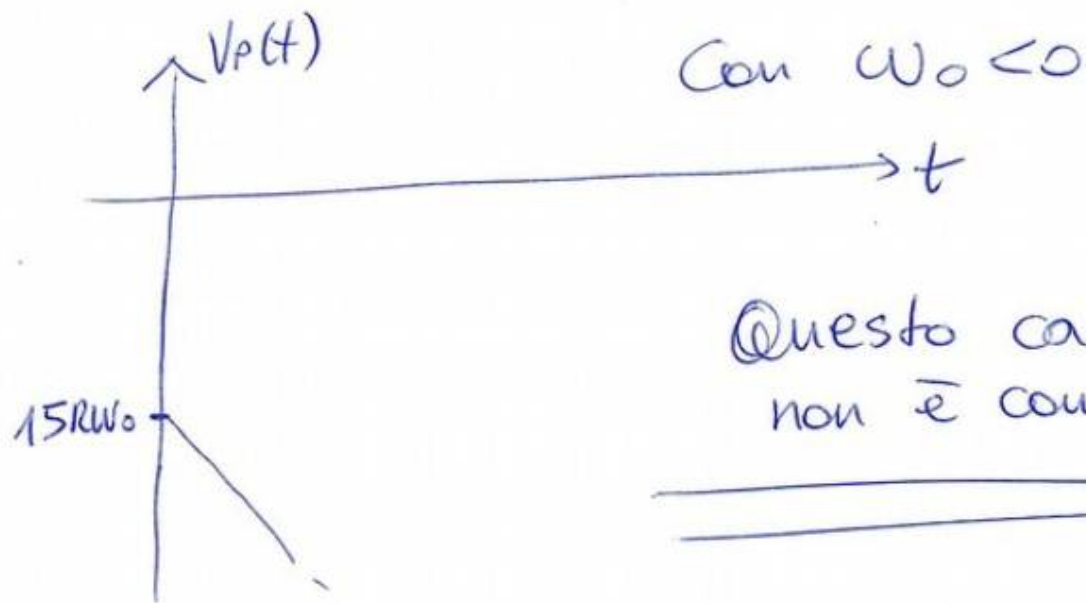
$$V_P(t) = -\mu_0 g t + 3R\omega_0 - \frac{9}{5}\mu_0 g t > 0$$

$$V_P(t) = 3R\omega_0 - \mu_0 g t \frac{14}{5} > 0$$

~~(14R\omega_0 - \mu_0 g t \frac{14}{5} > 0)~~ $15R\omega_0 - \mu_0 g t \frac{14}{5} > 0 \dots$ Disegniamo...



(3)



Questo caso
non è compatibile!

Seconde ipotesi: $V_p < 0$

In questo caso, $A > 0$. Per cui:

$$\begin{cases} M a = \mu M g \\ I \alpha = 3R \mu M g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \mu g \\ \alpha = \frac{3}{5} \frac{\mu g}{R} \end{cases}$$

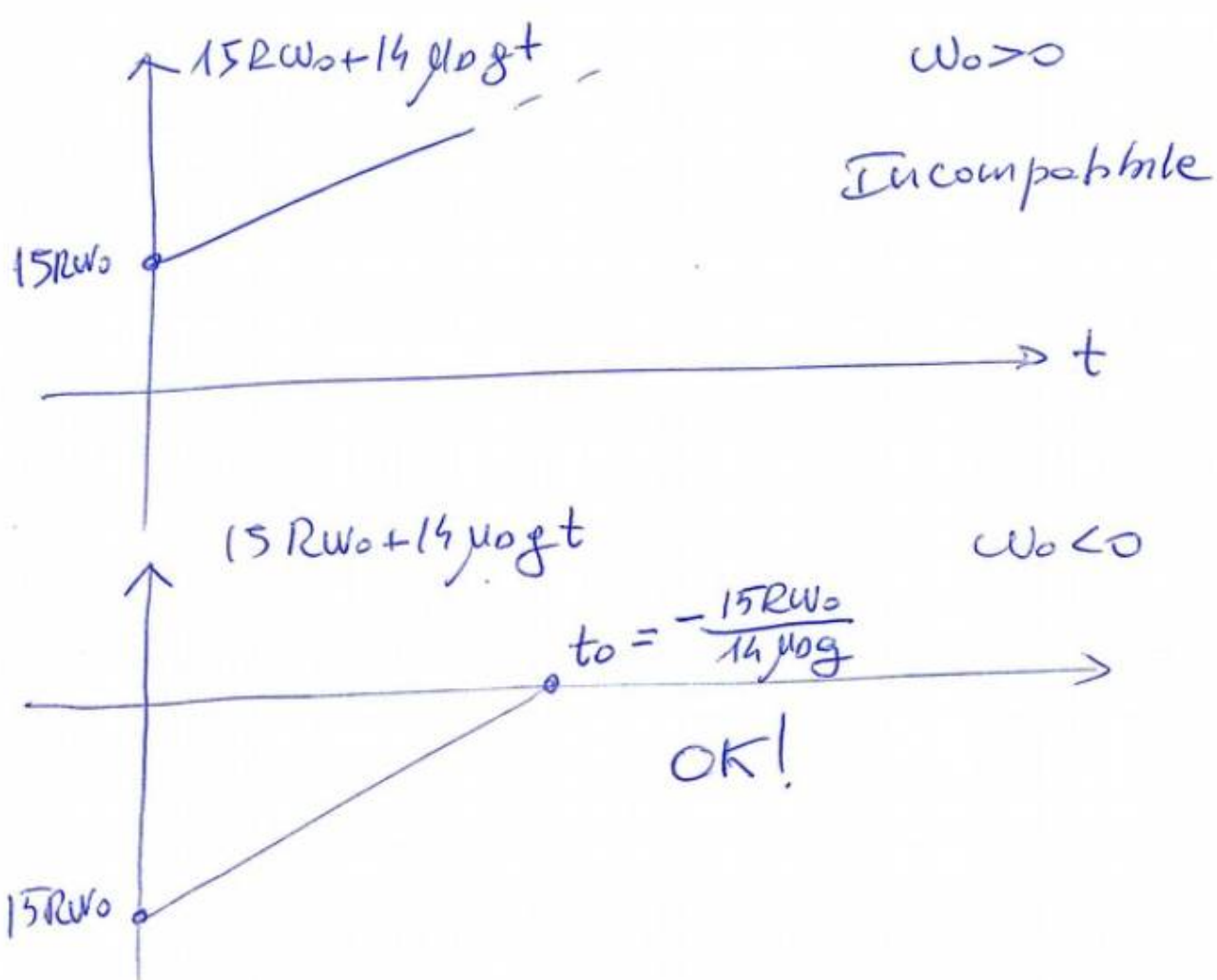
$$\Rightarrow \begin{cases} v(t) = \mu g t \\ \omega(t) = \omega_0 + \frac{3}{5} \frac{\mu g}{R} t \end{cases}$$

Valuto ora se $V_p(t) = v(t) + 3R\omega(t) < 0$

$$V_p(t) = \mu g t + 3R\omega_0 + \frac{9}{5} \mu g t < 0$$

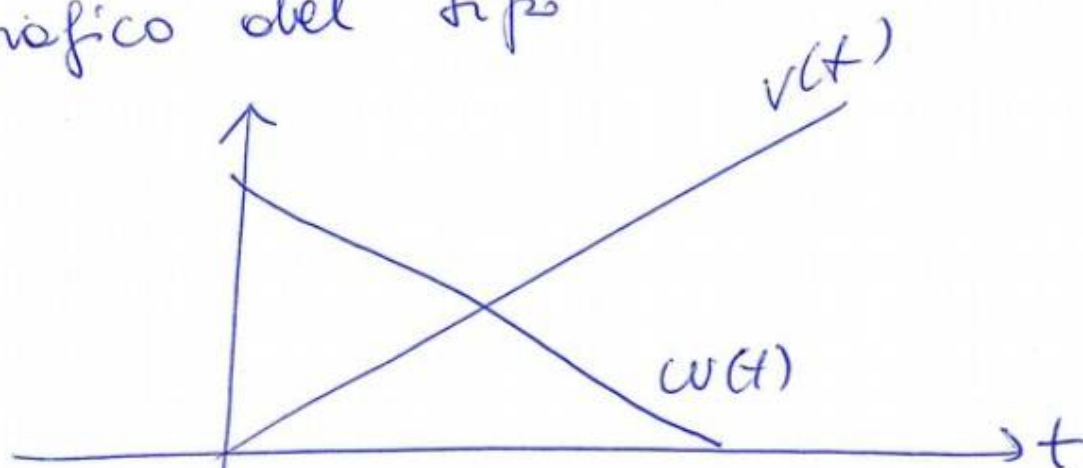
$$V_p(t) = 3R\omega_0 + \frac{14}{5} \mu g t < 0$$

$$15R\omega_0 + 14 \mu g t < 0$$



NOTA IMPORTANTE

Un grafico del tipo



non ha alcun senso!!! Infatti $v(t)$ e $\omega(t)$ hanno dimensioni diverse $\left(\frac{m}{s}, \frac{1}{s}\right)$... Anche $v(t) = \omega(t)$ è pericoloso!!!
 Il grafico da disegnare è quello di $v(t) \neq 3R\omega(t)$, non di $v(t)$ e $\omega(t)$ separati!

Prendiamo per buono
il caso con $V_P > 0$ e $\omega_0 > 0$.

In questo caso:

$$t_0 = \frac{15 R \omega_0}{14 \mu g} > 0$$

A t_0 il corpo non striscia più!
Cessa l'azione dell'attrito dinamico
ed interviene l'attrito ~~cinetico~~ statico.

Da notare che:

$$v(t_0) = -\mu g \frac{15 R \omega_0}{14 \mu g} = -\frac{15}{14} R \omega_0$$

$$\omega(t_0) = \omega_0 - \frac{3}{5} \frac{\mu g}{R} \frac{15}{14} \frac{R \omega_0}{\mu g} = \omega_0 \left(1 - \frac{9}{14} \right) = \omega_0 \frac{5}{14}$$

~~1) Il corpo ha iniziato a muoversi~~

1) Il corpo si sta muovendo verso sinistra
($v(t_0) < 0$)

2) Il corpo sta ruotando in senso antiorario
($\omega(t_0) > 0$)

3) Nonostante $v_P(t_0) = 0$, il corpo possiede
ancora energia cinetica

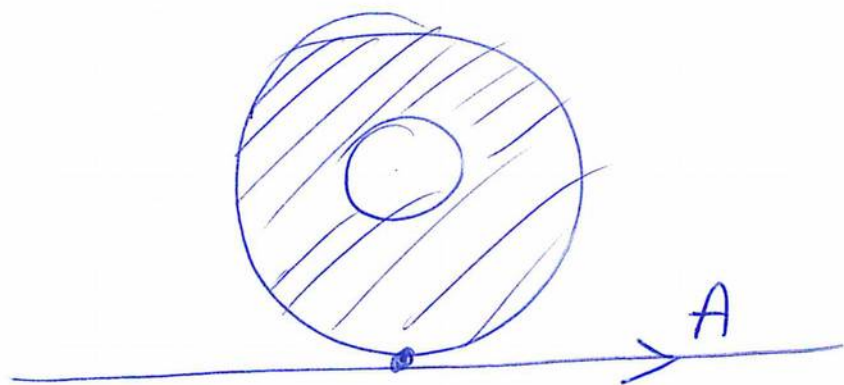
NOTA L'energia cinetica è diminuita!

$$K(0) = \frac{1}{2} I \omega_0^2 \quad K(t_0) = \frac{1}{2} I \omega_0^2 \left(\frac{5}{14} \right)^2 + \frac{1}{2} M \left(-\frac{15}{14} R \omega_0 \right)^2$$

$$K(t_0) = \frac{1}{2} \left(5MR^2\omega_0^2 \frac{5^2}{14^2} + MR^2\omega_0^2 \frac{15^2}{14^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} 5MR^2\omega_0^2 \left(\frac{5^2 + 15^2}{14^2} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 5 \text{ messo} \\ \text{in evidenza} \dots \end{array}$$

$$= \frac{1}{2} I\omega_0^2 \left(\frac{\cancel{140}}{196} \right) < \frac{1}{2} I\omega_0^2 = K(0) \dots$$



A stavolta è
attento
statico!

$$\begin{cases} Ma = A \\ I\alpha = 3RA \\ \cancel{v} \neq 3R\omega = 0 \end{cases}$$

$$a = \frac{A}{M}$$

$$\alpha = \frac{3RA}{I}$$

$$v(t) = -\frac{15}{4}R\omega_0 + \frac{A}{M}(t-t_0)$$

$$\omega(t) = \omega_0 \frac{5}{14} + \frac{3RA}{I}(t-t_0)$$

$$v(t) + 3R\omega(t) = 0 \Rightarrow$$

$$-\cancel{\frac{15}{4}R\omega_0} + \frac{A}{M}(t-t_0) + \cancel{\frac{15}{14}R\omega_0} + \frac{9R^2A}{I}(t-t_0) = 0$$

$$(t-t_0) \left(\frac{A}{M} + \frac{9R^2A}{5MR^2} \right) = 0$$

$$(t-t_0) \frac{A}{M} \left(1 + \frac{9}{5} \right) = 0$$

$$\frac{14}{5}(t-t_0) \frac{A}{M} = 0 \Leftrightarrow \text{deve essere vero per ogni } t > t_0$$

$\Rightarrow$ Dunque $A=0!!!$

$$\boxed{A=0 \leq \mu_s Mg} \quad (8)$$

Per cui otteniamo che il moto
di puro rotolamento è descritto
delle seguenti leggi orarie:

$$v(t) = -\frac{15}{4} R \omega_0$$

$$\forall t > t_0$$

$$W(t) = \omega_0 \frac{5}{14}$$

Ovvero il corpo trasla di moto
rettilineo uniforme, ~~il~~ moto
con velocità angolare costante.