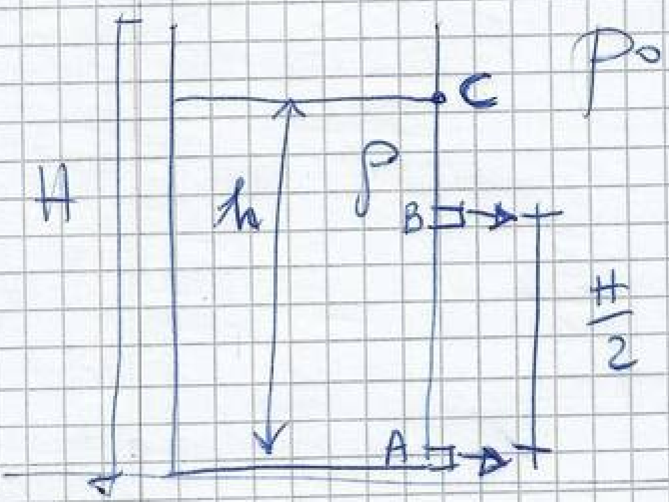
Fisica 1 - 17 Settembre 2005



Punto A

$$p_0 + \rho g \cdot 0 + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_A^2$$

Punto B

$$p_0 + \rho g \frac{H}{2} + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g \frac{H}{2}$$

$$\hookrightarrow \cancel{p_0} + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = \cancel{p_0} + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g \frac{H}{2}$$

$$\boxed{v_A^2 = v_B^2 + gH}$$

Punto C

Si può assumere $v_C \simeq 0$ poiché $s << S$.
Infatti dall'equazione di continuità si ha che:

$$s v_A + s v_B = S v_C \Rightarrow v_C = \frac{s(v_A + v_B)}{S} \simeq 0.$$

Per cui, nel punto C si ha:

$$\boxed{p_0 + \rho g h}$$

Punto A = Punto C

$$\hookrightarrow \cancel{p_0} + \frac{1}{2}\cancel{\rho} v_A^2 = \cancel{p_0} + \cancel{\rho} g h$$

$$\boxed{v_A^2 = 2gh}$$

$$\begin{cases} v_A^2 = 2gh \\ v_A^2 = v_B^2 + gH \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_A = \sqrt{2gh} \\ v_B^2 = 2gh - gH \end{cases}$$

$$\hookrightarrow v_B = \sqrt{g(2h - H)}.$$

Il sistema in esame ha massa variabile

$$m = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Volume}}}{\rho V} = \rho S h$$

con h che varia nel tempo a causa della fuoriuscita di liquido.

Sia v la velocità del carrello e u la velocità del liquido uscito.

Ad un certo ~~istante~~, la quantità di moto del ~~carrello~~ sistema è

$$p_1 = \underbrace{mv}_{\text{carrello}} + \underbrace{0}_{\text{liquido che esce}}$$
$$= \rho S h \cdot v$$

Dopo un tempo infinitesimo esce una quantità dm di liquido con velocità u.
Come conseguenza, la velocità v deve incrementare di dv.

$$p_2 = \underbrace{(m - dm)(v+dv)}_{\text{carrello}} + \underbrace{u\,dm}_{\text{liquido che esce}}$$

$$= mv + m\,dv - dm\,v - \underbrace{dm\,dv}_{\text{trascurabile}} + u\,dm$$

$$\Rightarrow dp = p_2 - p_1 = m\,dv + (u - v)\,dm$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} + (u-v)\frac{dm}{dt} \underset{\uparrow}{=} F$$

2ª legge di Newton

Sappiamo che

1) Il carrello rimane fermo.

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \;, \quad v = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{u \frac{dm}{dt} = F}$$

2) In un periodo di tempo pari a dt esce:

$dm_A = s V_A \rho\, dt$ liquido da A

$dm_B = s V_B \rho\, dt$ liquido da B

$$dm = s V_A \rho\, dt + s V_B \rho\, dt = s\rho (V_A + V_B) dt$$

$$\Rightarrow \frac{dm}{dt} = s\rho (V_A + V_B).$$

3) La velocità di uscita ~~del~~ di tutto il liquido ~~che~~ esce durante dt si calcola come la velocità del centro di massa del liquido:

$$u = \frac{dm_A \cdot V_A + dm_B \cdot V_B}{\cancel{V_A + V_B}\; dm_A + dm_B}$$

$$= \frac{\cancel{S} V_A^2 \cancel{\rho}\, \cancel{dt} + \cancel{S} V_B^2 \cancel{\rho}\, \cancel{dt}}{\cancel{S} \cancel{\rho}\, \cancel{dt} (V_A + V_B)} =$$

$$= \frac{V_A^2 + V_B^2}{V_A + V_B}$$

Quindi

$$u \frac{dm}{dt} = F$$

$$\frac{V_A^2 + V_B^2}{\cancel{V_A + V_B}} \cdot S\rho\, (\cancel{V_A + V_B}) = F$$

$$F = S\rho\,(2gh + 2gh - gH)$$

$$= S\rho g\,(4h - H).$$

NOTA

Questo vale finché $h > \frac{H}{2}$, ovvero esce ~~acqua~~ ~~liquido~~ sia da A che da B. In questo caso

$$h > \frac{H}{2} \Rightarrow 4h > 2H \Rightarrow 4h - H > H$$

$$\Rightarrow 4h - H > 0 \Rightarrow F > 0$$

Ad un certo istante, h sarà minore di $\frac{\pi}{2}$.

↳ Ripetere l'esercizio considerando solo il foro A!