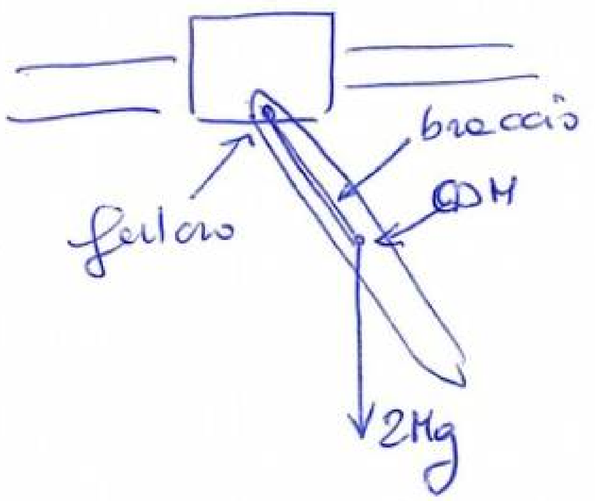
Compito di Fisica 1 del 3 Settembre 2015 - Esercizio 2

• L'unica forza esterna agente sul sistema è la gravità $\Rightarrow$ la gravità agisce solo lungo y $\Rightarrow$ la quantità di moto lungo x si conserva!

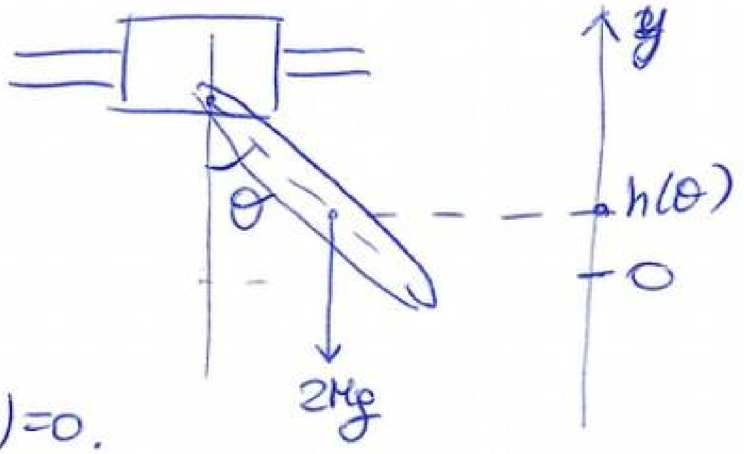
• In generale, la forza di gravità crea un momento esterno:



Dunque il momento angolare NON si conserva!

• Non ci sono forze non conservative $\Rightarrow$ Si conserva l'energia meccanica totale!

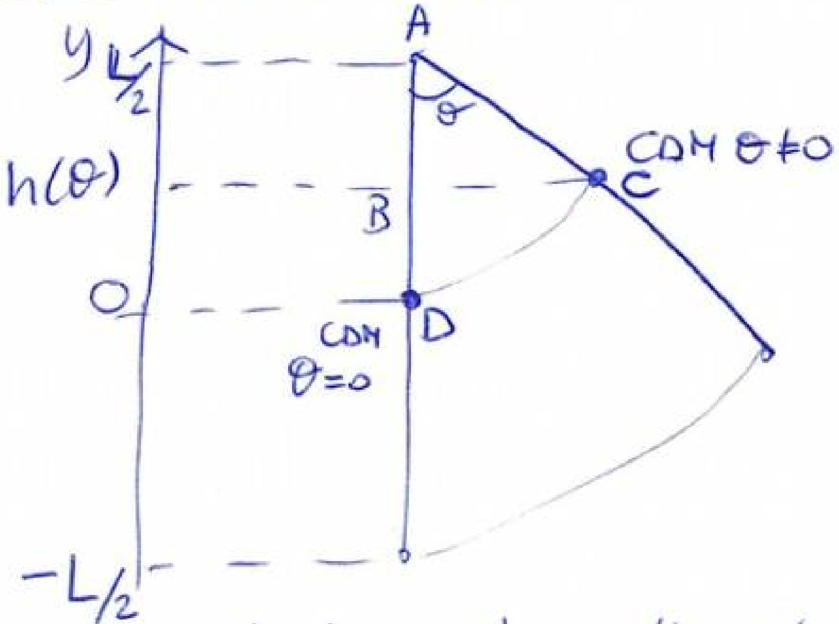
<u>Energia potenziale</u>



$h(\theta)$ è la quota del CDM al variare di θ.

Per $\theta=0$, poniamo $h(0)=0$.

Come trovo $h(\theta)$?



Considero il triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\overline{AC}=\frac{L}{2}$ (metà della sbarretta)

$$\Rightarrow \overline{AB}=\overline{AC}\cos\theta=\frac{L}{2}\cos\theta$$

$$h(\theta)=\overline{AD}-\overline{AB}=\frac{L}{2}-\frac{L}{2}\cos\theta=\frac{L}{2}(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow U(\theta)=2Mh(\theta)g=$$

$$=2M\frac{L}{2}(1-\cos\theta)g=ML(1-\cos\theta)g$$

Energia cinetica del manicotto

$$\frac{1}{2} M v^2(\theta)$$

$v(\theta)$: velocità del manicotto.

Energia cinetica del pendolo

$$\frac{1}{2} I\omega^2(\theta) + \boxed{\frac{1}{2}\, 2M\, v^2(\theta)}\,^{*}$$

$\omega(\theta)$: velocità angolare del manicotto

* Perchè questo termine?

□ Il pendolo è <u>legato</u> al manicotto, per cui, oltre ~~alla~~ velocità di rotazione, bisogna considerare anche $v(\theta)$.

Energia cinetica totale:

$$K(\theta) = \frac{1}{2} I\omega^2(\theta) + \frac{1}{2}\, 2M\, v^2(\theta) + \frac{1}{2} M v^2(\theta) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\, 2ML^2\omega^2(\theta) + \frac{3}{2} M v^2(\theta) =$$

$$= \frac{ML^2\omega^2(\theta)}{3} + \frac{3}{2} M v^2(\theta).$$

Energia meccanica totale

$$E(\theta) = U(\theta) + K(\theta) =$$
$$= MLg(1-\cos\theta) + \frac{1}{3}ML^2\omega^2(\theta) + \frac{3}{2}Mv^2(\theta).$$

Possiamo calcolare l'en. mecc. totale per $\theta = 0$, noto che:

- $v(\theta) = 0$ (manicotto fermo)
- $\omega(\theta) = \omega_0$

$$E(0) = \frac{1}{3}ML^2\omega_0^2$$

Per la conservazione di E, abbiamo che:

$$E(\theta) = E(0) \qquad \forall\theta.$$

Quantità di moto lungo x

$$p_x(\theta) = \underbrace{Mv(\theta)}_{\text{manicotto}} + \underbrace{2M\cdot\frac{L}{2}\omega(\theta)\cos\theta + \boxed{2Mv(\theta)}^{*}}_{\text{pendolo}}$$

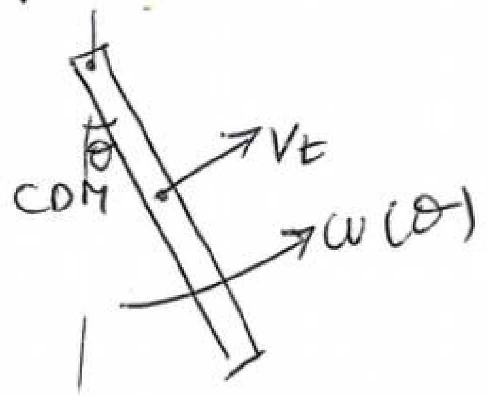
$*$ Questo termine è presente poichè il pendolo è <u>legato</u> al manicotto

$$p_x(\theta) = 3Mv(\theta) + ML\omega(\theta)\cos\theta$$

** Perchè abbiamo il termine

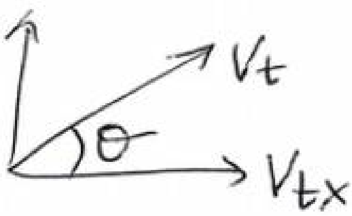
$$2M \frac{L}{2} \omega(\theta) \cos\theta \quad ?$$

La q. di moto del pendolo è pari alla sua massa (2M) per la velocità tangenziale dovute alla rotazione nel COM!



$$V_t = \frac{L}{2} \omega(\theta)$$

velocità tangenziale $\neq$ velocità lungo x



$$V_{tx} = V_t \cos\theta$$
$$= \frac{L}{2} \omega(\theta) \cos\theta .$$

Devo scomporre poichè a noi interessa solo il moto lungo x!

Possiamo calcolare p_x per $\theta=0$:

$$p_x(0) = ML\omega_0$$

Per la conservazione di p_x:

$$p_x(\theta) = p_x(0) \quad \forall\theta.$$

La massima ampiezza angolare viene raggiunta quando $\omega(\theta)=0$.

Sia $\bar\theta$ tale che $\omega(\bar\theta)=0$.

Usiamo $U(\bar\theta)=U(0)$ e $p_x(\bar\theta)=p_x(0)$:

$$\begin{cases} MLg(1-\cos\bar\theta)+\frac{3}{2}Mv^2(\bar\theta)=\frac{1}{3}ML^2\omega_0^2 \\ 3Mv(\bar\theta)=ML\omega_0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v(\bar\theta)=\frac{L\omega_0}{3} \\ MLg(1-\cos\bar\theta)+\frac{\cancel{3}^{1}}{2}M\frac{L^2\omega_0^2}{\cancel{9}_3}=\frac{1}{3}ML^2\omega_0^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v(\bar\theta)=\frac{L\omega_0}{3} \\ 6MLg-6MLg\cos\bar\theta+ML^2\omega_0^2=2ML^2\omega_0^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v(\bar\theta)=\frac{L\omega_0}{3} \\ 6MLg\cos\bar\theta=6MLg-ML^2\omega_0^2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\cos\bar\theta=1-\frac{L\omega_0^2}{6g}}$$

Ha senso parlare di "angolo max" $\bar{\theta}$ se

$$-1 \leq \cos\bar{\theta} \leq 1$$

cioè se

$$-1 \leq 1 - \frac{L\omega_0^2}{6g} \leq 1$$

$$-2 \leq -\frac{L\omega_0^2}{6g} \leq 0$$

$$0 \leq \frac{L\omega_0^2}{6g} \leq 2$$

~~Se~~ queste

$$0 \leq \omega_0^2 \leq \frac{12g}{L}$$

Se questo non è verificato, il pendolo compirà giri della morte!

Se questa è verificata, allora $\bar{\theta}$ esiste ed è

$$\boxed{\bar{\theta} = \pm \arccos\left(1 - \frac{L\omega_0^2}{6g}\right)}$$

<u>NB</u> Il "−" tiene conto anche del ritorno!

Velocità max del manicotto: $v(\bar{\theta})$

È stata già calcolata e vale

$$\frac{L\omega_0}{3}.$$