

Esercizio 2 - 23/06/2011

"Cosa si conserva durante l'urto?"

Osservazione La sbarretta non ha fulcro (non è imperniata al pavimento). Il testo non lo dice, il disegno impone...

Schema

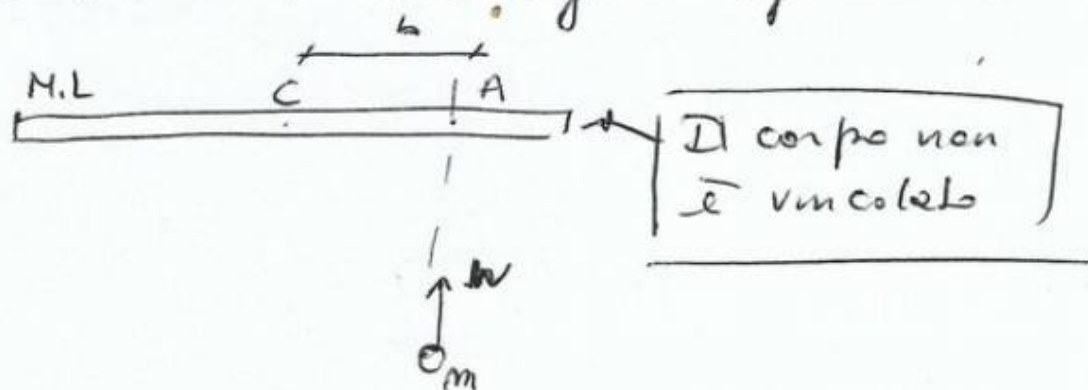
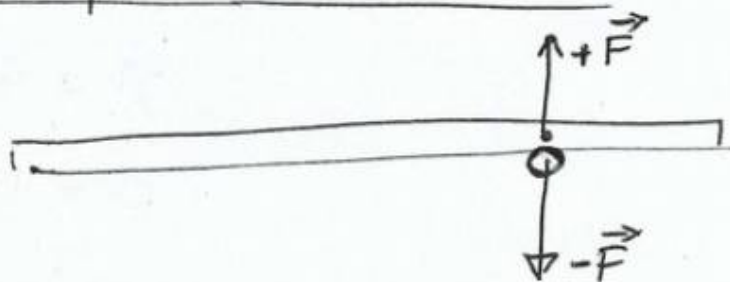


Diagramma forze impulsive durante l'urto



$$\vec{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ +F\delta(t) \end{bmatrix}, F > 0$$

$+\vec{F}$: forze subite dalla pallina a causa dell'asta

$-\vec{F}$: forze subite dall'asta a causa della pallina

Osservazione Non essendoci fulcro, non è presente alcuna reazione vincolare con il piano.
~~Da notare!~~

Energia cinetica Si conserva visto che l'urto è elastico.

Quantità di moto

Equazioni del moto sbarretta:

$$M \ddot{x}_S = 0$$

$$M \ddot{y}_S = +F \delta(t)$$

Equazioni del moto pallina:

$$m \ddot{x}_P = 0$$

$$m \ddot{y}_P = -F \delta(t)$$

Forza totale lungo x: $0 + 0 = 0$

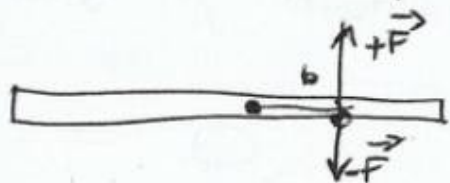
Forza totale lungo y: $+F \delta(t) - F \delta(t) = 0$

→ Si conserva la quantità di moto!

Momento angolare

Non essendoci un fulcro, possiamo scegliere noi un generico punto come polo rispetto al quale calcolare i momenti torcenti che apriscono istantaneamente durante l'urto.

Scegliamo ad esempio il C.D.M.:



Rotazione sbarretta:

$$I_S \ddot{\theta}_S = b F \delta(t)$$

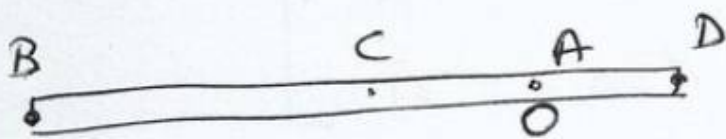
Rotazione pallina:

$$I_P \ddot{\theta}_P = -b F \delta(t)$$

Momento torcente totale: $b F \delta(t) - b F \delta(t) = 0$

→ Si conserva il momento angolare!

Osservazione Allo stesso risultato si arriva scegliendo ~~anche~~ qualsiasi altro punto come polo. Per esercizio, considerare come polo i punti A, B e D.



D'ora in avanti, assumiamo che il polo sia C.

Cons. energia

$$K_{S1} + K_{P1} = K_{S2} + K_{P2}$$

↑
en. cinetica
sbarretta
prima
dell'urto

↑
en. cinetica
pallina
prima
dell'urto

↑
en. cinetica
sbarretta
dopo
l'urto

↑
en. cinetica
pallina
dopo
l'urto

$$K_{S1} = 0 \quad (\text{sbarretta ferma all'inizio})$$

$$K_{P1} = \frac{1}{2} m w^2$$

$$K_{S2} = \frac{1}{2} M v_s^2 + \frac{1}{2} I_s \omega_s^2$$

$$K_{P2} = \frac{1}{2} m v_p^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m w^2 = \frac{1}{2} M v_s^2 + \frac{1}{2} I_s \omega_s^2 + \frac{1}{2} m v_p^2$$

v_s : vel. CM sbarretta
dopo l'urto

ω_s : vel. angolare
sbarretta
dopo l'urto

v_p : vel. pallina
dopo l'urto

↑
3 incognite

Cons. quantità di moto

$$p_{S1} + p_{P1} = p_{S2} + p_{P2}$$

$$p_{S1} = 0 \text{ (sbarrata ferma all'inizio)}$$

$$p_{P1} = mW$$

$$p_{S2} = MV_S$$

$$p_{P2} = mV_P$$

$$\Rightarrow mW = MV_S + mV_P$$

~~Cons. quantità di moto~~

Cons. momento angolare

$$L_{S1} + L_{P1} = L_{S2} + L_{P2}$$

$$L_{S1} = 0 \text{ (sbarrata ferma all'inizio)}$$

$$L_{P1} = I_P \omega_{P1} = mb^2 \left(\frac{W}{b} \right) = mbW$$

$$L_{S2} = I_S \omega_S$$

$$L_{P2} = I_P \omega_{P2} = mb^2 \left(\frac{V_P}{b} \right) = mbV_P$$

ω_{P1} : vel. angolare pallina prima dell'urto

ω_{P2} : vel. angolare pallina dopo l'urto -

$$\Rightarrow mbW = I_S \omega_S + mbV_P$$

Sisteme ole ansdvere:

$$1) \int \frac{1}{2} m w^2 = \frac{1}{2} M v_s^2 + \frac{1}{2} I_s \omega_s^2 + \frac{1}{2} m v_p^2$$

$$2) m w = M v_s + m v_p$$

$$3) m b w = I_s \omega_s + m b v_p$$

$$3) \Rightarrow m w = \frac{I_s \omega_s}{b} + m v_p \quad 4)$$

$$2) + 4) \Rightarrow M v_s + \cancel{m v_p} = \frac{I_s \omega_s}{b} + \cancel{m v_p}$$

$$M v_s = \frac{I_s \omega_s}{b}$$

$$M v_s = \frac{1}{12} M L^2 \frac{\omega_s}{b}$$

$$\boxed{v_s = \frac{L^2}{12 b} \omega_s} \quad 5)$$

$$2) + 5) \Rightarrow m v_p = m w - M v_s$$

$$v_p = w - \frac{M}{m} v_s$$

$$\boxed{v_p = w - \frac{M L^2}{12 m b} \omega_s} \quad 6)$$

$$1) + 5) + 6) \Rightarrow \frac{1}{2} m w^2 = \frac{1}{2} M \left(\frac{L^2}{12 b} \omega_s \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{M L^2}{12} \omega_s^2 + \frac{1}{2} m \left(w - \frac{M L^2}{12 m b} \omega_s \right)^2$$

$$\cancel{m w^2} = \frac{M L^4 \omega_s^2}{144 b^2} + \frac{M L^2}{12} \omega_s^2 + \cancel{m w^2} + \frac{M^2 L^4}{144 m b^2} \omega_s^2 - \frac{2 m M L^2 w \omega_s}{12 m b}$$

$$0 = \omega_s^2 \left(\frac{M L^4}{144 b^2} + \frac{M L^2}{12} + \frac{M^2 L^4}{144 m b^2} \right) - \frac{M L^2 w \omega_s}{6 b}$$

$$\omega_s^2 \left(\frac{m M L^4 + 12 M L^2 b^2 + M^2 L^4}{144 m b^2} \right) - \frac{M L^2 w \omega_s}{6 b} = 0$$

Esclusa la soluzione $ws=0$, si ha che:

$$ws = \frac{\frac{ML^2 w}{6b}}{\frac{mML^4 + 12MmbL^2b^2 + M^2L^4}{144mb^2}}$$

$$ws = \frac{\cancel{ML^2}}{\cancel{6b}} \cdot \frac{144mb^2w}{\cancel{ML^2}(mL^2 + 12mb^2 + ML^2)}$$

$$= \frac{24mbw}{mL^2 + 12mb^2 + ML^2}$$

$$Vs = \frac{L^2}{\cancel{12b}} \cdot \frac{24mb^2w}{mL^2 + 12mb^2 + ML^2}$$

$$= \frac{2mwL^2}{mL^2 + 12mb^2 + ML^2}$$

$$Vp = W - \frac{ML^2}{\cancel{12mb}} \cdot \frac{24mb^2w}{mL^2 + 12mb^2 + ML^2}$$

$$= W - \frac{2ML^2w}{mL^2 + 12mb^2 + ML^2}$$

$$= W \frac{mL^2 + 12mb^2 - ML^2}{mL^2 + 12mb^2 + ML^2}$$

"Per quale b , si ha che w_s è massima?"

$$w_s = \frac{24mbw}{mL^2 + 12mb^2 + ML^2}$$

$$\begin{aligned}\text{Sia: } A &= 24mbw > 0 \\ B &= L^2(m+M) > 0 \\ C &= 12b^2m > 0\end{aligned}$$

Allora:

$$w_s = \frac{Ab}{B + Cb^2}$$

$$b \in [0; \frac{L}{2}]$$

Il massimo di w_s corrisponde o ad un punto stazionario di w_s ($w'_s = 0$) o sta su uno estremo dell'intervallo $[0; \frac{L}{2}]$.

$$w_s(b=0) = \frac{A \cdot 0}{B + C \cdot 0^2} = 0$$

$$\begin{aligned}w_s(b = \frac{L}{2}) &= \frac{A \frac{L}{2}}{B + C \frac{L^2}{4}} = \frac{AL}{2} \cdot \frac{4}{4B + CL^2} \\ &= \frac{2AL}{4B + CL^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w'_s &= \frac{A(B + Cb^2) - Ab \cdot 2Cb}{(B + Cb^2)^2} = \\ &= \frac{AB + ACb^2 - 2ACb^2}{(B + Cb^2)^2} = \\ &= \frac{AB - ACb^2}{(B + Cb^2)^2}\end{aligned}$$

$$w_s' = 0 \Rightarrow AB - ACb^2 = 0$$

$$Cb^2 = B$$

$$b = \sqrt{\frac{B}{C}}$$

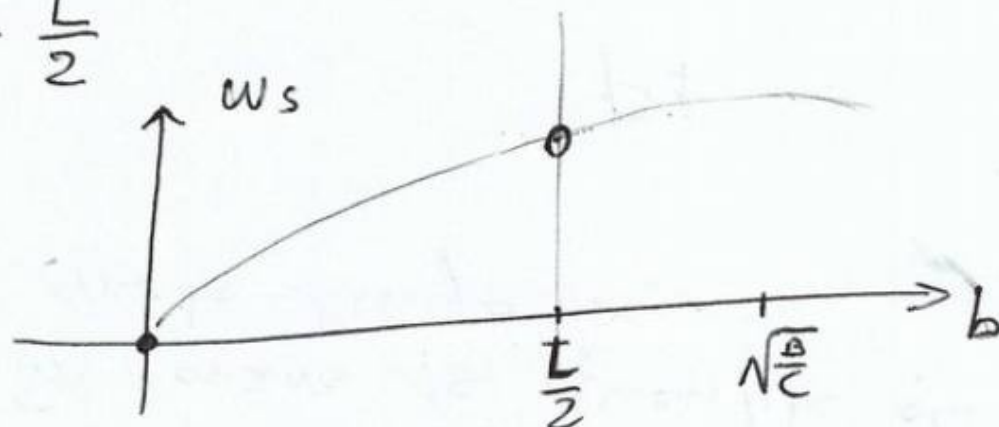
Da notare che:

$$w_s' > 0 \text{ se } 0 < b < \sqrt{\frac{B}{C}}$$

$$w_s' < 0 \text{ se } b > \sqrt{\frac{B}{C}}$$

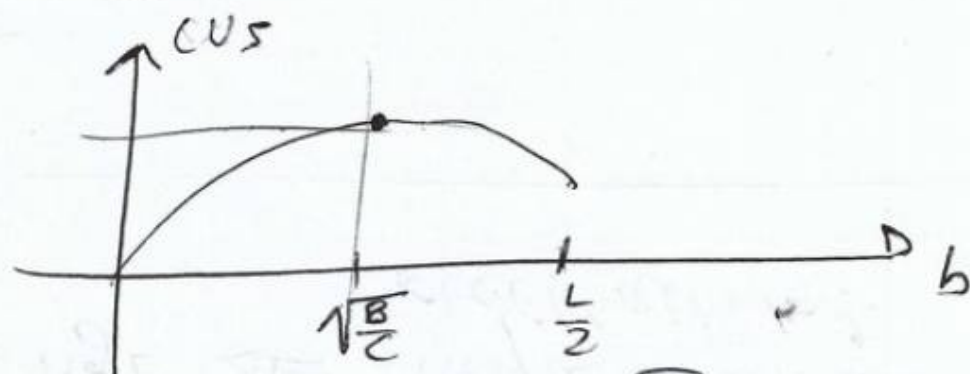
Si hanno due casi

$$1) \sqrt{\frac{B}{C}} > \frac{L}{2}$$



$\Rightarrow \Pi \text{ max si ha per } b = \frac{L}{2}$

$$2) \sqrt{\frac{B}{C}} < \frac{L}{2}$$



$\Rightarrow \Pi \text{ max si ha per } b = \sqrt{\frac{B}{C}}$