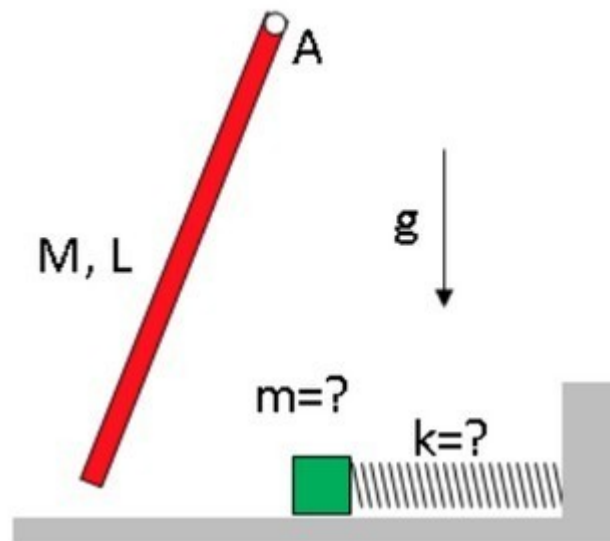


Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 12 Febbraio 2021



Consideriamo il sistema visto al quesito precedente.

Una sbarretta omogenea (massa M e lunghezza L vincolata al suo estremo A , la quale è inizialmente ferma a formare un piccolo angolo con la verticale. Lasciata libera, essa va ad urtare un punto materiale posto sotto il fulcro, l'urto è istantaneo ed elastico. Dopo l'urto il punto materiale si muove sul piano orizzontale (che è liscio) e la sbarretta resta immobile. Una molla è connessa al punto materiale, per cui esso tornerà ad urtare la sbarretta.

Il sistema compie così un moto periodico.

In ogni periodo, la sbarretta si muove per $1/3$ del tempo e il punto per i rimanenti $2/3$.

Qual è la costante elastica della molla?

3) • Pendolo che compie piccole oscillazioni.
Equazione del moto:

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

$$I \ddot{\theta} = - Mg \frac{L}{2} \theta$$

$\frac{L}{2} \rightarrow$ distanza fulcro - cm.

$$\Rightarrow \omega_p = \sqrt{\frac{Mg \frac{L}{2}}{I}} = \sqrt{\frac{Mg \frac{L}{2} \cdot 3}{2 \cdot ML^2}} = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$$

$$\Rightarrow T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Senza urto, il periodo di oscillazione del pendolo è T_p . Da notare che una volta la massa all'istante $t = t_2 = \frac{T_p}{4}$.

• @ $t = t_2 = \frac{T_p}{4}$, si conservano:

- 1) Energia meccanica
- 2) Momento angolare

Si riveda la lezione 7
Del corso di recupero di
Fisica 2019/2020

~~Attenzione:~~

Nota che tra t_1^- e t_1^+ , il COM del pendolo non cambia posizione...

$$\Rightarrow U_p(t_1^-) = U_p(t_1^+)$$

Inoltre:

$$K_p(t_1^-) = \frac{1}{2} I \omega_p^2(t_1)$$

$$K_p(t_1^+) = 0$$

← dal
del
problema

Per quanto riguarda la massa:

$$U_m(t_1^-) = U_m(t_1^+)$$

$$K_m(t_1^-) = 0$$

$$K_m(t_1^+) = \frac{1}{2} m v_m^2(t_1)$$

Quindi:

$$\cancel{I\omega_p(t_1^-)} + K_p(t_1^-) + \cancel{V_{cm}(t_1^-)} + K_m(t_1^-) = \\ = \cancel{V_p(t_1^+)} + K_p(t_1^+) + \cancel{V_{cm}(t_1^+)} + K_m(t_1^+) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} I \omega_p^2(t_2) = \frac{1}{2} m V_{cm}^2(t_2)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{ML^2}{3} \omega_p^2(t_2) = m V_{cm}^2(t_2) \right] (2)$$

Per quanto riguarda il momento angolare:

$$L_p(t_2^-) = I \omega_p(t_2) \quad L_p(t_2^+) = 0$$

$$L_m(t_1^-) = 0 \quad L_m(t_2^+) = m L V_{cm}(t_2)$$

Quindi

$$L_p(t_1^-) + L_m(t_1^-) = L_p(t_1^+) + L_m(t_1^+)$$

$$I \omega_p(t_2^+) = m L V_{cm}(t_2)$$

$$\left[\frac{ML^2}{3} \omega_p(t_2^+) = m L V_{cm}(t_2) \right] (2)$$

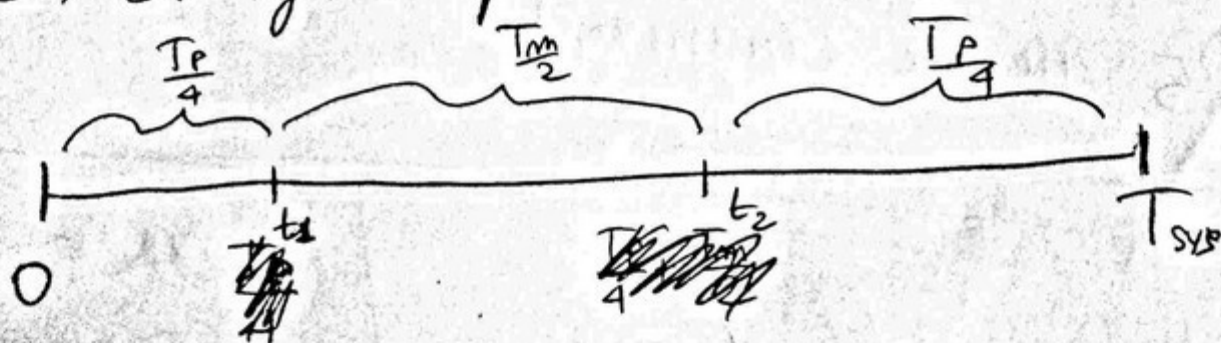
- La massa m si mette in moto dopo l'urto.
Equazione del moto:

$$m \ddot{x}_m = -k x_m$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad T_m = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

La massa impiega mezzo periodo per tornare dove era $\left(\frac{T_m}{2}\right)$. Si ripete l'urto.

Per simmetria stavolta m si ferma e il pendolo inizia a muoversi verso sinistra. Si fermerà poi nella posizione iniziale e tutto ricomincia!
 $\Rightarrow$ Il sys. è periodico!



Dai dati del problema, si sa che:

$$\frac{T_p}{4} + \frac{T_p}{4} = \frac{1}{3} T_{sys} \quad \left| \quad \frac{T_m}{2} = \frac{2}{3} T_{sys} \right.$$

tempo in cui si muove il pendolo
tempo in cui si muove m

Inoltre: $\frac{T_p}{4} + \frac{T_m}{2} + \frac{T_p}{4} = T_{sys}$

Si ha che:

$$\begin{cases} \frac{T_p}{2} = \frac{1}{3} T_{sys} \\ \frac{T_m}{2} = \frac{2}{3} T_{sys} \\ \frac{T_p}{2} + \frac{T_m}{2} = T_{sys} \text{ (RIBANDANTE)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{sys} = \frac{3}{2} T_p \\ \frac{T_m}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} T_p \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_m = 2T_p}$$

$$\Rightarrow 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \cdot 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

$$\sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \sqrt{\frac{2L}{3g}} \Rightarrow \frac{m}{k} = 4 \cdot \frac{2L}{3g} \Rightarrow \boxed{m = \frac{8}{3} \frac{Lk}{g}} \quad (3)$$

Uniamo le equazioni (1), (2) e (3):

$$\begin{cases} \frac{ML^2 \omega_p^2}{3} = m V_m^2 \\ \frac{ML^2}{3} \omega_p = m L V_m \\ m = \frac{8}{3} \frac{Lk}{g} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{ML^2}{3} \left(\frac{m V_m}{ML} \right)^2 = m V_m^2 \\ \omega_p = \frac{m V_m}{ML} \\ k = \frac{3mg}{8L} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{m^2 V_m^2 g^3}{M^2 L^2} = m V_m^2 \\ \omega_p = \frac{3m V_m}{ML} \\ k = \frac{3mg}{8L} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3m}{M} = 1 \\ \omega_p = \frac{3m V_m}{ML} \\ k = \frac{3mg}{8L} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{M}{3} \\ \omega_p = \frac{V_m}{L} \\ k = \frac{Mg}{8L} \end{cases}$$