

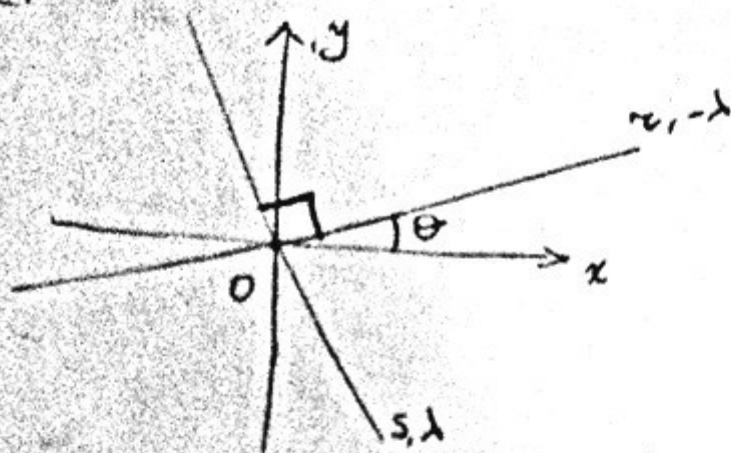
## Esercizio estratto dall'esame di Fisica 2 del 12 Febbraio 2021

Si hanno due rette perpendicolari,  $r$  e  $s$ . Esse si intersecano nell'origine di un piano cartesiano  $xOy$  che le contiene entrambe. La retta  $r$  forma un angolo  $\theta$  con l'asse  $x$ .

Su di esse è distribuita uniformemente carica con densità  $\lambda$  su  $s$  e  $-\lambda$  su  $r$ .

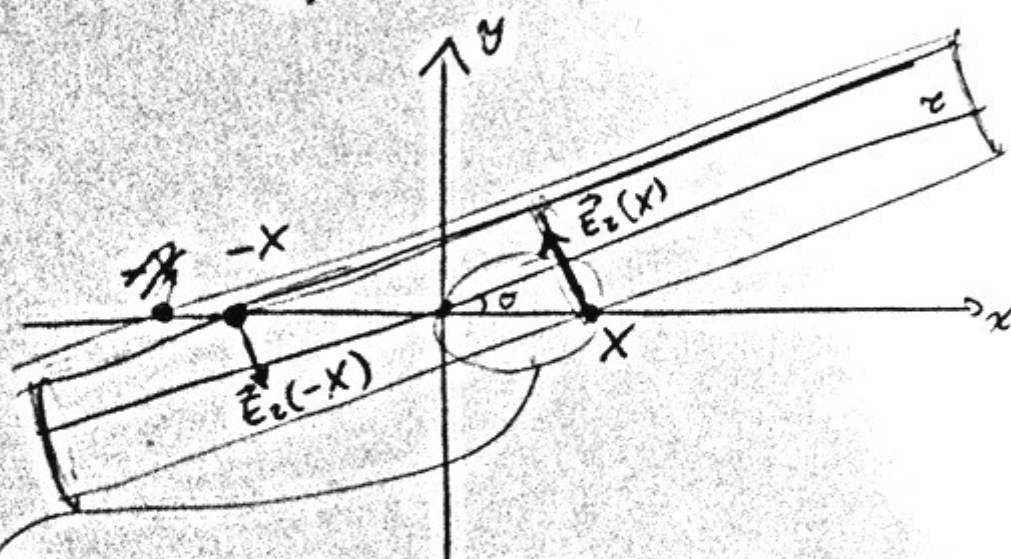
Qual è il campo sui punti dell'asse  $x$ ?

[6]



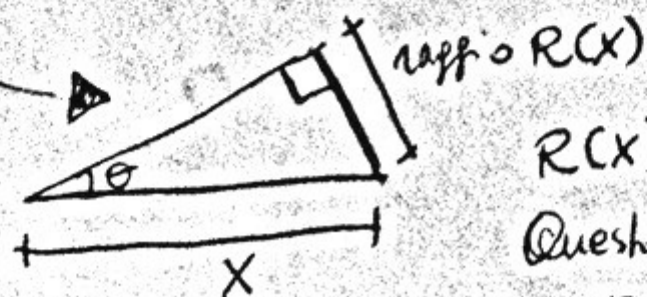
Angolo  
retto.

Consideriamo un cilindro  $\tilde{V}$  il cui asse coincide con la retta  $r$ : infinitamente lungo



Siano  $X$  e  $-X$  i punti in cui la superf. del cilindro interseca l'asse  $y$ . Poichè  $r$  è carica negativamente, il campo in  $X$  e  $-X$  punta verso  $r$ . La direzione è radiale a causa della simmetria cilindrica.

Quale è il raggio del cilindro?



$$R(X) = X \sin \theta.$$

Questo vale anche per  $-X$ . Quindi:

$$R(X) = |X| \sin \theta.$$

(1)

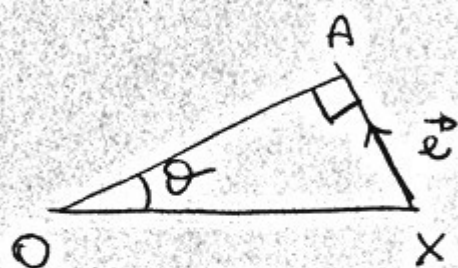
Per il teorema di Gauss, il modulo del campo  $\vec{e}$ :

$$|\vec{E}_z(x)| \cdot 2\pi R(x) \cdot h = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda h$$

$$\Rightarrow |\vec{E}_z(x)| = \frac{\lambda}{2\pi |x| \sin\theta \epsilon_0}$$

(Valido anche per  $-x$ ).

Quale è il versore del campo?



I 2 triangoli sono simili (3 angoli uguali)

$$\Rightarrow \underbrace{\overline{DB} : \overline{OA}}_{\text{cateti adiacenti a } \theta} = \underbrace{\overline{BC} : \overline{AX}}_{\text{cateti opposti a } \theta} \quad \left\| \begin{array}{l} \overline{OA} = x \cos\theta \\ \overline{AX} = x \sin\theta \end{array} \right.$$

$$\frac{\overline{DB}}{x \cos\theta} = \frac{\overline{BC}}{x \sin\theta} \Rightarrow \overline{DB} = \frac{\overline{BC}}{\tan\theta}$$

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} -\overline{BC} \\ +\overline{DB} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{DB}^2}} = \begin{bmatrix} -\overline{BC} \\ \frac{\overline{BC}}{\tan\theta} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{\overline{BC}^2 + \frac{\overline{BC}^2}{\tan^2\theta}}} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\overline{BC} \\ \frac{\overline{BC}}{\tan\theta} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\overline{BC} \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2\theta}}} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{\tan\theta} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta}}} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{\tan\theta} \end{bmatrix} \cdot \sin\theta = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

Quindi:  $\vec{E}_z(x) = \frac{\lambda}{2\pi |x| \sin\theta \epsilon_0} \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ +\cos\theta \end{bmatrix}$  per  $x$ .

Per  $-x$ ...

$$\vec{E}_z(x) = \frac{\lambda}{2\pi |x| \sin\theta \epsilon_0} \begin{bmatrix} -\sin(\pi+\theta) \\ +\cos(\pi+\theta) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi |x| \sin\theta \epsilon_0} \begin{bmatrix} +\sin\theta \\ -\cos\theta \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi (-x) \sin\theta \epsilon_0} \begin{bmatrix} +\sin\theta \\ -\cos\theta \end{bmatrix}$$

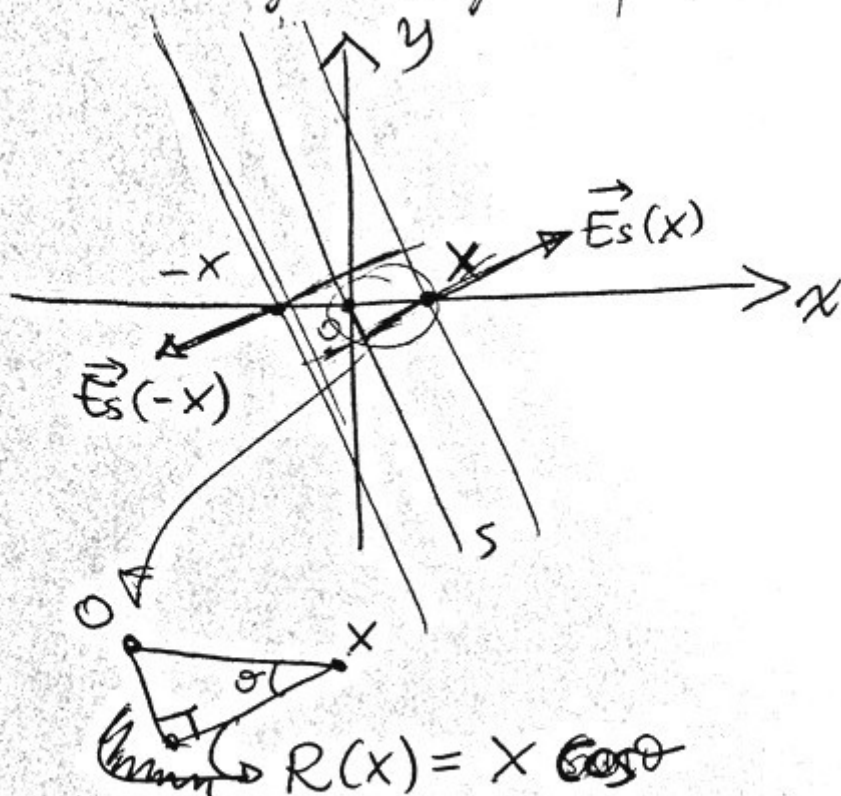
$$= \frac{\lambda}{2\pi x \sin\theta \epsilon_0} \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ +\cos\theta \end{bmatrix}$$

... insomma,  $\vec{E}_z(x) = \frac{\lambda}{2\pi x \sin\theta \epsilon_0} \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ +\cos\theta \end{bmatrix}$

$\forall x \in \mathbb{R}!$

---

risultati analoghi valgono per la retta  $S$ :



Questa volta, poiché  $S$  è positivamente carico, il campo è radiale e punta verso l'esterno del cilindro.

Applicando il teorema di Gauss, otteniamo di nuovo

$$|\vec{E}_s(x)| = \frac{\lambda}{2\pi |x| \cos \theta \epsilon_0} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Il versore stavolta è:  $\vec{e} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{E}_s(x) = \frac{\lambda}{2\pi x \cos \theta \epsilon_0} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Campo totale:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x) &= \frac{\lambda}{2\pi x \sin \theta \epsilon_0} \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ +\cos \theta \end{bmatrix} + \frac{\lambda}{2\pi x \cos \theta \epsilon_0} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi x \epsilon_0} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ +\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \end{bmatrix} \right\} = \frac{\lambda}{2\pi x \epsilon_0} \begin{bmatrix} 0 \\ \cotan x + \tan x \end{bmatrix} \end{aligned}$$