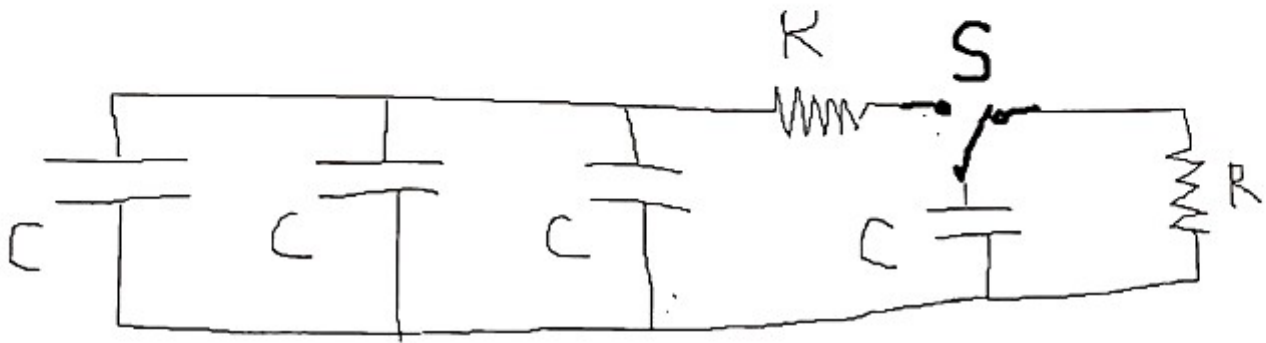


Esercizio proposto da un* student*



Quattro condensatori di capacità C , un switch S e due resistor di resistenza R .

I 3 condensatori a sinistra sono carichi e il quarto è scarico. Aziono il switch S N volte aspettando ogni volta molto tempo. Di quale fattore si riduce l'energia elettrostatica nel circuito? Per "azionare S " intendo spostare a sinistra, aspettare, spostare di nuovo a destra e aspettare.

0) Sia V_0 la tensione ai capi dei 3 condensatori a sinistra.

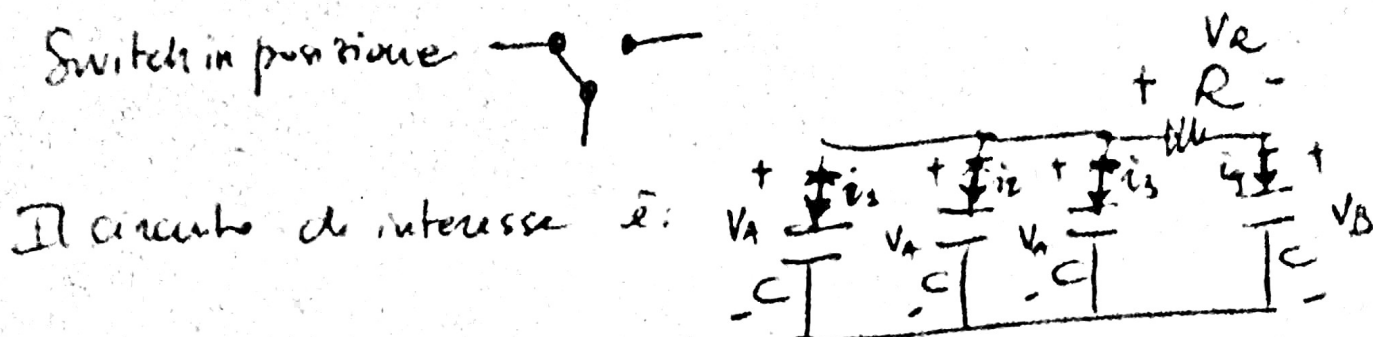
Questo significa che inizialmente la carica contenuta nel circuito è:

$$Q_0 = 3 \cdot C V_0$$

Inoltre, l'energia elettrica iniziale accumulata è:

$$E_0 = 3 \cdot \frac{1}{2} C V_0^2.$$

1) Switch in posizione 



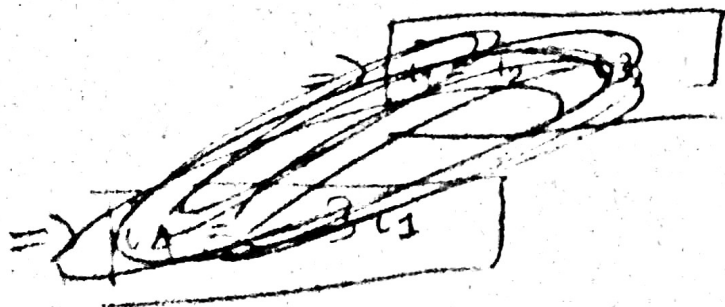
La corrente che fluisce su R è:

$$i_4 = -i_1 - i_2 - i_3 \quad (\text{II legge di Kirchhoff}).$$

La tensione su 3 condensatori a sinistra è V_A .

~~Dunque~~ La tensione sul condensatore a destra è V_B .

$$i_1 = C \frac{dV_A}{dt}, \quad i_2 = C \frac{dV_A}{dt}, \quad i_3 = C \frac{dV_A}{dt}$$



$$i_4 = C \frac{dV_B}{dt}.$$

NOTA $i_1, i_2, i_3, i_4, V_A, V_B$ variano nel tempo dopo aver switchato.

In particolare $V_A(0) = V_0, \quad V_B(0) = 0.$

Siano q_1, q_2, q_3 e q_4 le cariche sui vari condensatori. Si ha che:

$$i_n = \frac{d}{dt} q_n. \quad \text{Si sa anche che:}$$

$$\textcircled{1} \quad i_4 = -i_1 - i_2 - i_3 \Rightarrow i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (q_1 + q_2 + q_3 + q_4) = 0$$

$\Rightarrow$ Carica del circuito resta costante!

Quando ~~il~~ ~~si~~ passa un tempo suff. lungo, si ha che la tensione sui condensatori diventa costante.

Se la tensione diventa costante, si ha che:

$$i_1(\infty) = C \underbrace{\frac{d}{dt} V_A(\infty)}_{\text{costante}} = C \cdot 0 = 0$$

$$i_2(\infty) = C \frac{d}{dt} V_A(\infty) = 0$$

$$i_3(\infty) = C \frac{d}{dt} V_A(\infty) = 0$$

$$i_4(\infty) = C \frac{d}{dt} V_B(\infty) = 0$$

Visto che per $t = +\infty$, $i_4 = 0$, allora su R non passa corrente. Quindi:

$$V_A(\infty) = V_B(\infty).$$

Variamo le case:

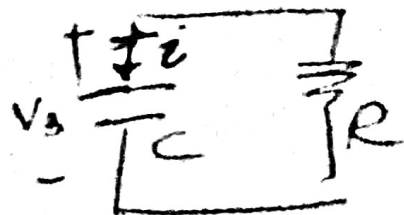
$$\begin{cases} V_A(\infty) = V_B(\infty) \\ Q_0 = Q(\infty) \quad (\text{carica costante}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_A(\infty) = V_B(\infty) \\ 3CV_0 = \underbrace{3C V_A(\infty) + C V_B(\infty)}_{\text{Carica finale.}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_A(\infty) = V_B(\infty) \\ 3V_0 = 3V_A(\infty) + V_A(\infty) \Rightarrow V_A(\infty) = \frac{3}{4} V_0 \\ \Downarrow \\ V_B(\infty) = \frac{3}{4} V_0 \end{cases}$$

2) Switch in posizione

Il circuito di interesse è:

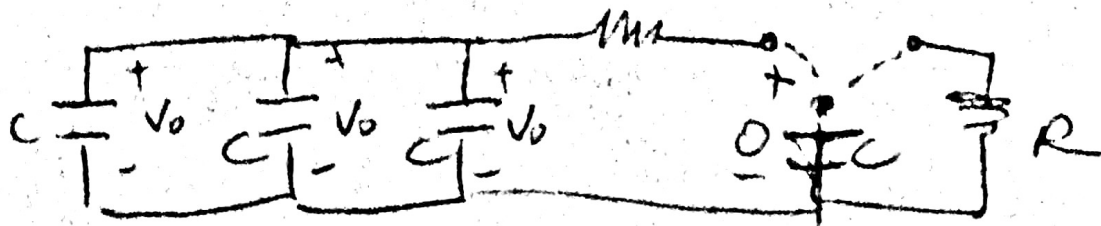


In questo caso, si ha la scarica del condensatore dopo un tempo infinitamente lungo.

$$\Rightarrow V_B(\infty) = 0.$$

Caricoli:

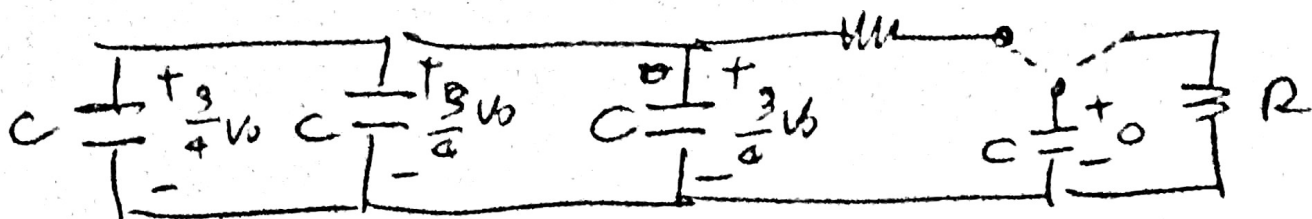
Inizialmente avevamo R



Cioè

$$E_0 = 3 \cdot \frac{1}{2} C V_0^2$$

Alla fine del doppio switch:



$$\Rightarrow E_4 = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot C \left(\frac{3}{4} V_0 \right)^2$$

$$= \frac{3}{2} C \frac{9}{16} V_0^2 = \frac{27}{32} C V_0^2 =$$

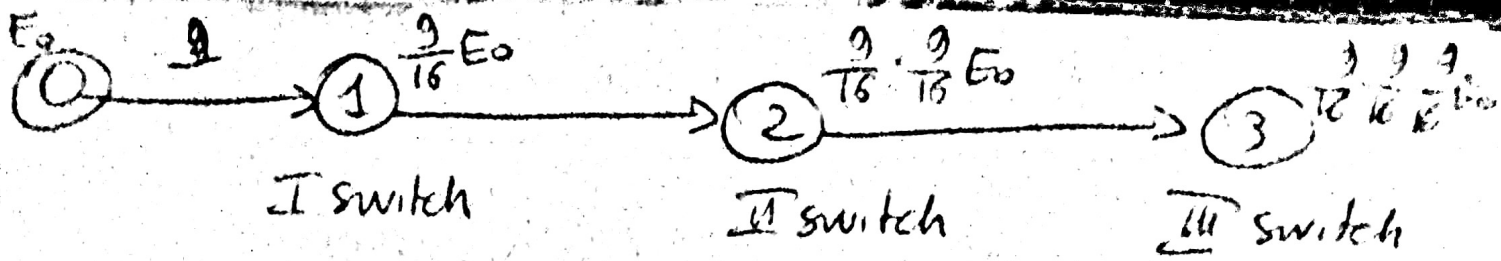
~~Dopo uno switch~~

$$= \frac{27}{32} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} C V_0^2 =$$

$$= \frac{9}{16} \cdot E_0$$

Cioè dopo uno switch, l'energia si riduce di un fattore $\frac{9}{16}$.

(4)



(per switch si intende il doppio passaggio)



Quindi dopo N switch, l'energia accumulata è

$$E_N = \left(\frac{9}{16}\right)^N \cdot E_0$$