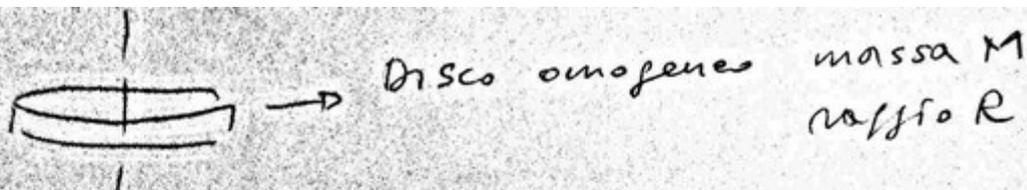


Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 22 Gennaio 2021

Si ha un disco omogeneo di massa M e raggio R . Esso inizialmente è fermo, poi viene messo in rotazione mediante un motore che sviluppa una potenza costante, pari a P . Quanto tempo si impiega per far compiere al disco i primi n giri?



$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} MR^2$$

Un motore lo fa ruotare. Sia τ il momento torcente generato dal motore. Si ha che:

$$I \dot{\omega} = \tau$$

Dai dati del problema, si sa che il motore lavora a potenza costante. La potenza nel caso rotazionale è definita come:

$$P = \tau \cdot \omega = I \dot{\omega} \cdot \omega$$

$$\Rightarrow \boxed{I \dot{\omega} = \frac{P}{\omega}} \text{ equazione del moto.}$$

Si sa che $\omega(0) = 0$ (il disco parte da fermo).

Si ha che:

$$I \frac{d\omega}{dt} = \frac{P}{\omega} \Rightarrow I \omega d\omega = P dt \Rightarrow$$

$$\int_{\omega(0)}^{\omega(t)} I \omega d\omega = \int_0^t P ds$$

$$I \left(\frac{\omega^2}{2} \right)_{\omega(0)}^{\omega(t)} = P(t-0)$$

$$I \left(\frac{\omega^2(t)}{2} - \frac{\omega^2(0)}{2} \right) = P(t-0) \Rightarrow \frac{I \omega^2(t)}{2} = Pt \Rightarrow$$

$$\omega(t) = \sqrt{\frac{2Pt}{I}} \text{ legge oraria velocità.}$$

Da qui posso calcolare la legge oraria dell'angolo percorso:

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \frac{d}{dt} \theta(t) \Rightarrow \theta(t) = \theta(0) + \int_0^t \omega(s) ds = \\ &= \theta(0) + \int_0^t \sqrt{\frac{2P}{I}} s^{\frac{1}{2}} ds = \theta(0) + \sqrt{\frac{2P}{I}} \left(\frac{s^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right)_0^t = \\ &= \theta(0) + \sqrt{\frac{2P}{I}} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \theta(t) - \theta(0) = \sqrt{\frac{2P}{I}} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}$$

Sia t_1 l'istante in cui il disco compie n giri.

Si ha che:

$$\theta(t_1) - \theta(0) = 2\pi \cdot n = \sqrt{\frac{2P}{I}} \cdot \frac{2}{3} t_1^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow t_1^{\frac{3}{2}} = 3\pi n \sqrt{\frac{I}{2P}} = 3\pi n \sqrt{\frac{MR^2}{4P}}$$

$$\Rightarrow t_1^3 = 9\pi^2 n^2 \frac{MR^2}{4}$$

$$\Rightarrow t_1 = \left(\frac{9\pi^2 n^2 MR^2}{4P} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

②