

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 22 Gennaio 2021

Un punto materiale di massa M si muove su una circonferenza di raggio R centrata nell'origine di un piano orizzontale liscio, su cui è definito un sistema di coordinate cartesiane xOy .

Sul punto agisce una forza dipendente da x secondo la relazione $F=(bx,0)$, con $b>0$. Il punto parte da fermo dal punto di coordinate $(R/2, R\sqrt{3}/2)$. Qual è l'intensità della forza centripeta sull'oggetto, quando esso ha compiuto un quarto di giro?

ESERCIZIO 8

- La posizione del corpo ad un generico istante t è:

$$x(t) = R \cos \theta(t)$$

$$y(t) = R \sin \theta(t)$$

- La forza $\vec{F}$ può essere scritta come segue:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} bx \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bR \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Qualunque sia il modo in cui viene scritta, essa è evidentemente conservativa. Il potenziale associato è:

$$U = -\frac{1}{2} b x^2$$

- Detti $\vec{e}_T = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ +\cos \theta \end{bmatrix}$ e $\vec{e}_C = \begin{bmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \end{bmatrix}$ i versori

tangente e centripeto, possiamo scomporre $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \vec{F}_T + \vec{F}_C = (\vec{F} \cdot \vec{e}_T) \vec{e}_T + (\vec{F} \cdot \vec{e}_C) \vec{e}_C =$$

$$= -bR \sin \theta \cos \theta \vec{e}_T - \underbrace{bR \cos^2 \theta}_{\text{negativo}} \vec{e}_C.$$

Il "modulo" della parte centripeta è negativo!
Questo significa che la componente $\vec{F}_C$ punta
sempre in direzione centrifuga!!!

Poiché il moto è circolare, allora deve essere presente un'altra forza "nascosta", $\vec{F}_N$, che punta in direzione centripeta.

$$\vec{F}_N = F_N \cdot \vec{e}_c, \quad F_N > 0.$$

In particolare:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{tot}} &= \vec{F} + \vec{F}_N = \\ &= -bR \sin\theta \cos\theta \vec{e}_t - bR \cos^2\theta \vec{e}_c + F_N \vec{e}_c \end{aligned}$$

e quindi

$$F_{\text{tot}} = -bR \cos^2\theta + F_N > 0$$

(modulo forza centripeta totale)

$$\Rightarrow F_N > bR \cos^2\theta.$$

- La forza $\vec{F}_N$ non compie lavoro. Dunque non ci importa della sua natura. ~~(è conservativa)~~

~~Questo significa che il sistema è conservativo.~~

Ovvero non ci importa se $\vec{F}_N$ è conservativa o no.

In ogni caso non compie lavoro!

$\Rightarrow$ Il "sistema" rimane conservativo.

• Dal testo si sa che la massa parte in posizione

$$\begin{bmatrix} \frac{R}{2} \\ \frac{R\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} \end{bmatrix}. \text{ Ovvero } \theta(0) = \frac{\pi}{3}.$$

L'energia del sistema @ $t=0$ è:

$$\begin{aligned} K(0) + U(0) &= 0 + \left(-\frac{1}{2} b x^2 \right) = \\ &= -\frac{1}{2} b \left(\frac{R}{2} \right)^2 = -\frac{bR^2}{8}. \end{aligned}$$

• Il corpo compie un quarto di giro.

Dunque:

$$\begin{aligned} K(t_{\frac{1}{4}}) + U(t_{\frac{1}{4}}) &= \frac{1}{2} M |\vec{V}_{\frac{1}{4}}|^2 + \left(-\frac{1}{2} b x^2 \right) \quad \begin{array}{c} \frac{1}{4} \text{ di giro} \\ \downarrow \end{array} \\ &= \frac{1}{2} M |\vec{V}_{\frac{1}{4}}|^2 - \frac{1}{2} b (R \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}))^2 \\ &= \frac{1}{2} M |\vec{V}_{\frac{1}{4}}|^2 - \frac{bR^2}{2} \cos^2\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ &= \frac{1}{2} M |\vec{V}_{\frac{1}{4}}|^2 - \frac{bR^2}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} M |\vec{V}_{\frac{1}{4}}|^2 - \frac{bR^2}{8} \cdot 3. \end{aligned}$$

* $|\vec{V}_{\frac{1}{4}}|$ è il modulo della velocità tangenziale dopo $\frac{1}{4}$ di giro.

• Per la conservatività dell'energia:

$$K(0) + U(0) = K(t_{\frac{1}{4}}) + U(t_{\frac{1}{4}})$$

$$-\frac{bR^2}{8} = \frac{1}{2} M |\vec{V}_{\frac{1}{4}}|^2 - \frac{bR^2}{8}$$

$$\frac{1}{2} M |\vec{V}_{\frac{1}{4}}|^2 = \frac{1}{4} bR^2$$

$$|\vec{V}_{\frac{1}{4}}| = \sqrt{\frac{bR^2}{2M}} = R \sqrt{\frac{b}{2M}}$$

• Per le proprietà del moto circolare, si sa che:

$$F_{CTOT} = \frac{M |\vec{V}|^2}{R}$$

$$F_{CTOT}(t_{\frac{1}{4}}) = M R^2 \frac{b}{2M} \cdot \frac{1}{R} = \left(\frac{bR^2}{2} \right)$$