

Esercizi estratti dall'esame di Fisica 1 del 4 Novembre 2020

- 10) Un punto materiale di massa $M = 5,4\text{Kg}$ si muove lungo un binario liscio rettilineo sotto l'effetto di una forza conservativa a cui è associata un'energia potenziale descritta da

$$U(x) = Ax \exp(-Bx^2)$$

Dove $A = 30\text{N}$, $B = 0.50\text{m}^{-2}$ e x , che può variare da $-\infty$ a $+\infty$, è la posizione rispetto ad un punto O del binario, definito come origine delle ascisse.

Il prossimo quesito prende in esame lo stesso sistema, ma riguarderà il moto intorno ad eventuali di punti di equilibrio.

Qui invece si chiede per quali valori della velocità in O si ha che il punto può muoversi fino a raggiungere ascisse arbitrariamente grandi ($x \rightarrow +\infty$).

- 11) Consideriamo il sistema del quesito precedente:
un punto materiale di massa M che si muove lungo un binario liscio rettilineo sotto l'effetto di una forza conservativa a cui è associata un'energia potenziale descritta da

$$U(x) = Ax \exp(-Bx^2)$$

Stabilire se esiste qualche posizione di equilibrio stabile e, se ne esiste solo una, determinare la pulsazione ω di piccole oscillazioni intorno a tale punto

101

C'est un minimum probable

$$U(x) = A x e^{-B x^2}$$

$$F(x) = - \frac{d}{dx} U(x) = - \left[A e^{-B x^2} - 2 B x A x e^{-B x^2} \right]$$

$$= - \left[A e^{-B x^2} - 2 A B x^2 e^{-B x^2} \right] =$$

$$= A \left[2 B x^2 - 1 \right] e^{-B x^2}$$

Equilibre: x^* : $F(x^*) = 0$

$$\Rightarrow x_1^* = -\sqrt{\frac{1}{2B}} \quad , \quad x_2^* = +\sqrt{\frac{1}{2B}}$$

Stabilité: signe de $U''(x)$.

$$U''(x) = A B x (4 B x^2 - 6) e^{-B x^2}$$

$$U''(x_1^*) = - A B \sqrt{\frac{1}{2B}} (2 - 6) e^{-\frac{B}{2B}}$$

$$= + A B \sqrt{\frac{1}{2B}} e^{-\frac{1}{2}} > 0 \Rightarrow x_1^* \text{ est stable.}$$

$$U''(x_2^*) = + A B \sqrt{\frac{1}{2B}} (2 - 6) e^{-\frac{B}{2B}} < 0 \Rightarrow x_2^* \text{ est instable}$$

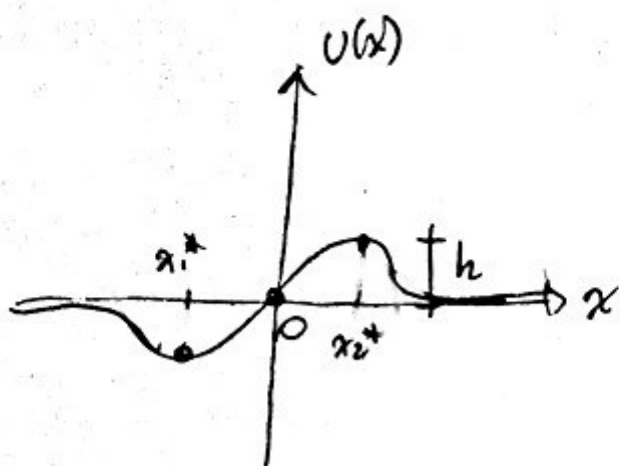


grafico probabile

Se siamo in 0,
devo avere un'energia
cinetica maggiore
di h per superare
l'equilibrio instabile.

$$h = U(x_2^*) - U(0) =$$

$$= A\sqrt{\frac{1}{2B}} e^{-\frac{B}{2B}} - 0 = A\sqrt{\frac{1}{2B}} e^{-\frac{1}{2}} \simeq 18.196 \text{ J}$$

$$\Rightarrow K_0 = \frac{1}{2} M v_0^2 = h$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2h}{M}} \simeq 2 \text{ m/s}$$

Quindi $v_0 > 2 \text{ m/s}$.

11) Poiché x_1^* è stabile, è possibile che si possano osservare oscillazioni armoniche (piccole).

Si assume che:

$$\begin{aligned} F(x) &\simeq F(x_1^*) + F'(x_1^*)(x - x_1^*) + \dots \\ &= -U'(x_1^*) + U''(x_1^*)(x - x_1^*) + \dots \\ &= 0 - \underbrace{4AB \sqrt{\frac{1}{2B}} e^{-\frac{1}{2}} \left(x + \frac{1}{\sqrt{2B}}\right) + \dots} \end{aligned}$$

Questo termine è nella forma
 $-k(x - x_0)$

Ovvero per piccole oscillazioni (Taylor primo ordine), il sistema si comporta come una molla $\Rightarrow$ oscillazioni armoniche.

$$k = 4AB \sqrt{\frac{1}{2B}} e^{-\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad 45.49 \frac{N}{m}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4AB e^{-\frac{1}{2}}}{m \sqrt{2B}}}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{4AB}{m \sqrt{2B}} e^{-\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \text{cancellato}$$