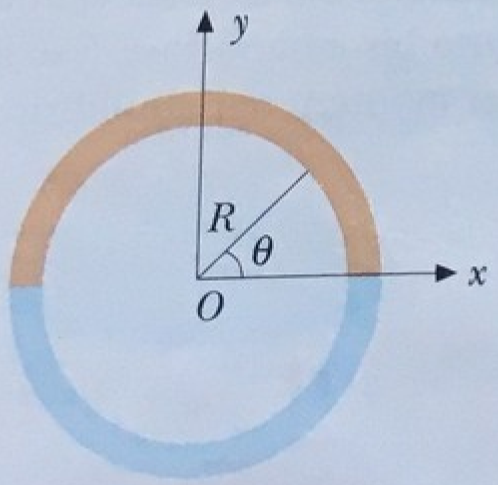
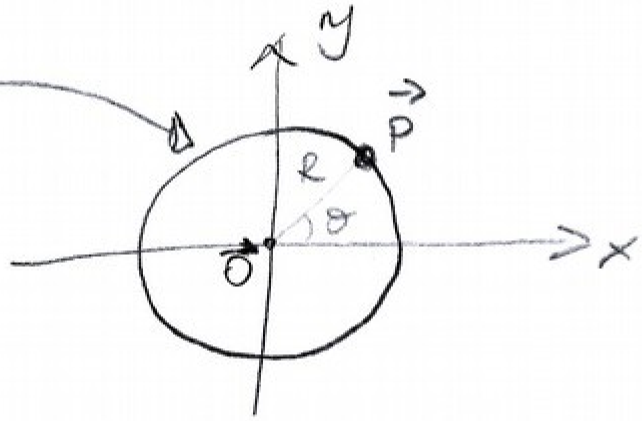
Un esercizio di Fisica 2 sulle distribuzioni di carica

1.15 Un anello sottile di materiale isolante di raggio R, posto nel piano xy e con centro nell'origine O, possiede una carica distribuita con densità $\lambda = \lambda_0$ sen θ, dove θ è l'angolo formato con l'asse x. Determinare il campo elettrostatico E_0 nel centro O.



Esercizio 1.15

$\lambda = \lambda_0 \sin\theta$



Campo generato nel punto $\vec{O}$ generato da una carica dq situata in un punto $\vec{P}$:

$$d\vec{E}(\vec{O},\vec{P}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{O}-\vec{P}}{\|\vec{O}-\vec{P}\|^3} dq$$

$$\vec{O} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{P} = \begin{bmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\|\vec{O}-\vec{P}\| = \left\| \begin{bmatrix} -R\cos\theta \\ -R\sin\theta \end{bmatrix} \right\| = R.$$

Quindi:

$$d\vec{E}(\vec{O},\vec{P}) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \begin{bmatrix} -R\cos\theta \\ -R\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

Il campo totale è:

$$\vec{E}(\vec{O}) = \int d\vec{E}(\vec{O},\vec{P}) = -\int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}$$

$$E_x(\vec{O}) = -\int \frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,dq$$

$$E_y(\vec{O}) = -\int \frac{\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,dq$$

$$dq = R\,\lambda(\theta)\,d\theta = R\lambda_0 \sin\theta\, d\theta$$

$$E_x(\vec{O}) = -\int_0^{2\pi} \frac{R\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\underbrace{\cos\theta}_{f'}\underbrace{\sin\theta}_{f}\,d\theta$$

$$\int f f' = \frac{f^2}{2}$$

$$= -\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[\frac{0}{2}-\frac{0}{2}\right] = 0.$$

$$E_y(\vec{0}) = - \int_0^{2\pi} \frac{R\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \sin^2\theta \, d\theta$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}\left(x - \sin(x)\cos(x)\right)$$

$$= -\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[\frac{1}{2}\left(x - \sin(x)\cos(x)\right)\right]_0^{2\pi} =$$

$$= -\frac{\lambda_0}{8\pi\varepsilon_0 R}\left[\left(2\pi - \sin(2\pi)\cos(2\pi)\right) - \left(0 - \sin(0)\cos(0)\right)\right]$$

$$= -\frac{\lambda_0}{8\pi\varepsilon_0 R}\left[(2\pi - 0) - (0 - 0)\right] =$$

$$= -\frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}.$$