Corso di recupero di Fisica 2019/2020

Dario Madeo

Lezione del 20/03/2020

madeo@diism.unisi.it
madeo@dii.unisi.it
http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1920.html

Vettori

$\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

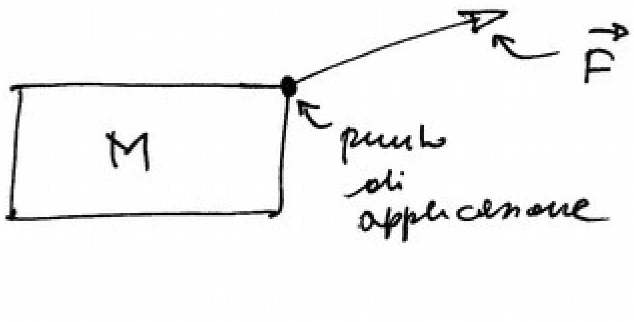
1) Modulo (o intensità)

$(\mathbb{R}^2)$ $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$(\mathbb{R}^3)$ $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

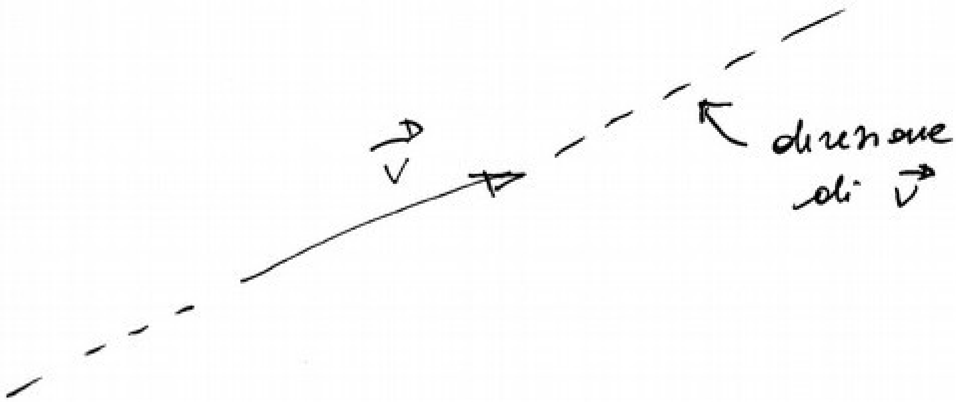
2) Punto di applicazione

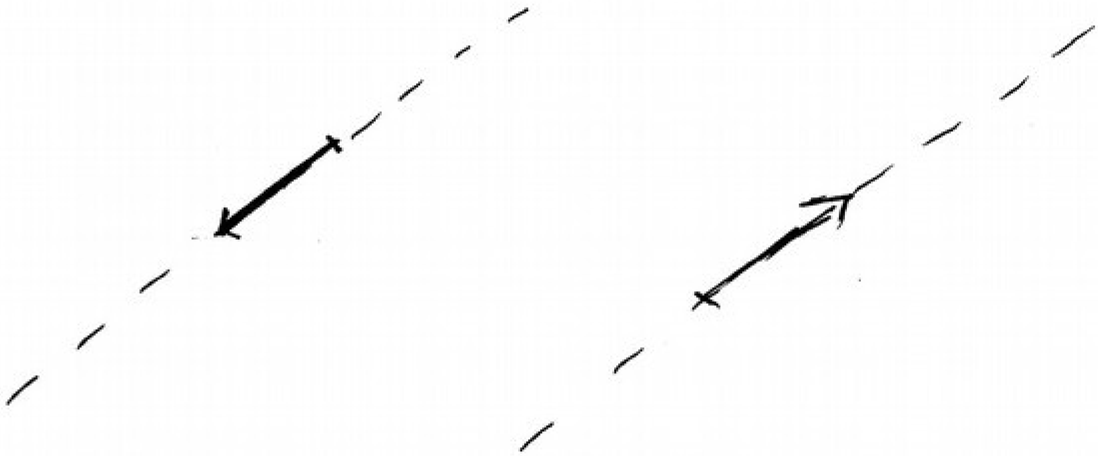
Il punto sul quale l'entità fisica descritta dal vettore agisce.



3) Direzione

La retta su cui il vettore giace.





4) <u>Verso</u> Orientamento del vettore lungo la direzione.

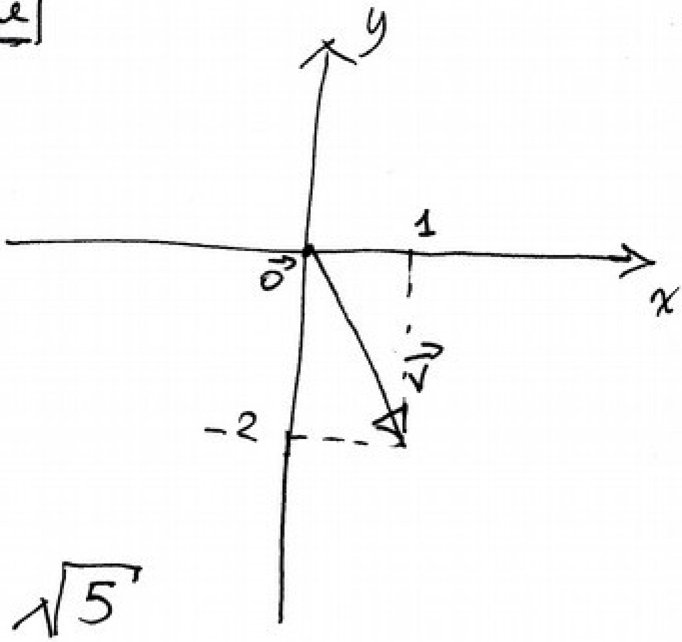
<u>Lavoriamo su direzione e verso</u>

$$\vec{V} = |\vec{V}| \cdot \vec{e}$$

$|\vec{e}| = 1$, $\vec{e}$ $\boxed{\text{versore}}$

<u>Es</u> $\vec{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

(Punto di applicazione è $\vec{0}$)

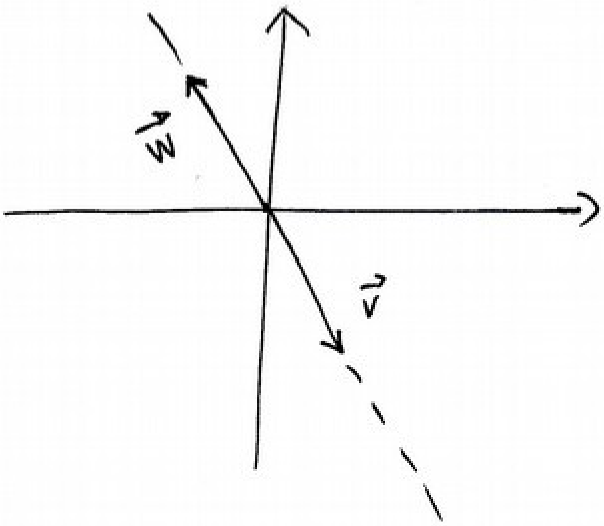


$$|\vec{V}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\vec{e} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \vec{V} = \underbrace{\sqrt{5}}_{\text{modulo}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

direzione e verso



$$\vec{w} = -\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ +2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{w} = |\vec{w}| \cdot \vec{f}$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5} = |\vec{v}|$$

$$\vec{f} = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -\vec{e}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \vec{w} &= -|\vec{v}| \cdot \vec{e} \\ \vec{v} &= \underbrace{+}_{\text{verso}}\underbrace{|\vec{v}|}_{\text{modulo}} \cdot \underbrace{\vec{e}}_{\text{direzione}} \end{aligned}}$$

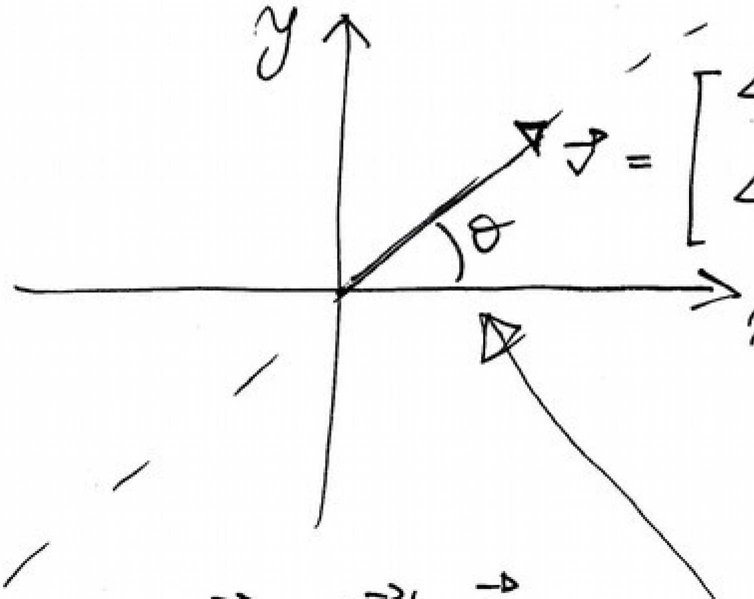
Proprietà di $\vec{e}$

$$|\vec{e}| = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} = 1$$

$$|\vec{e}|^2 = \boxed{e_x^2 + e_y^2 = 1}$$

$$\equiv$$

$$\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$$



$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \to \text{Rappresentazione algebrica}$$

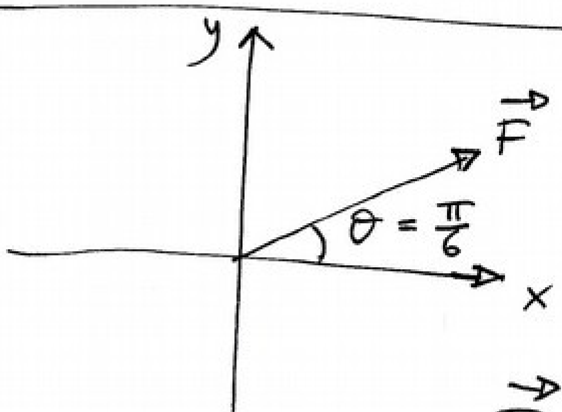
$$\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \vec{e}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\vec{e} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

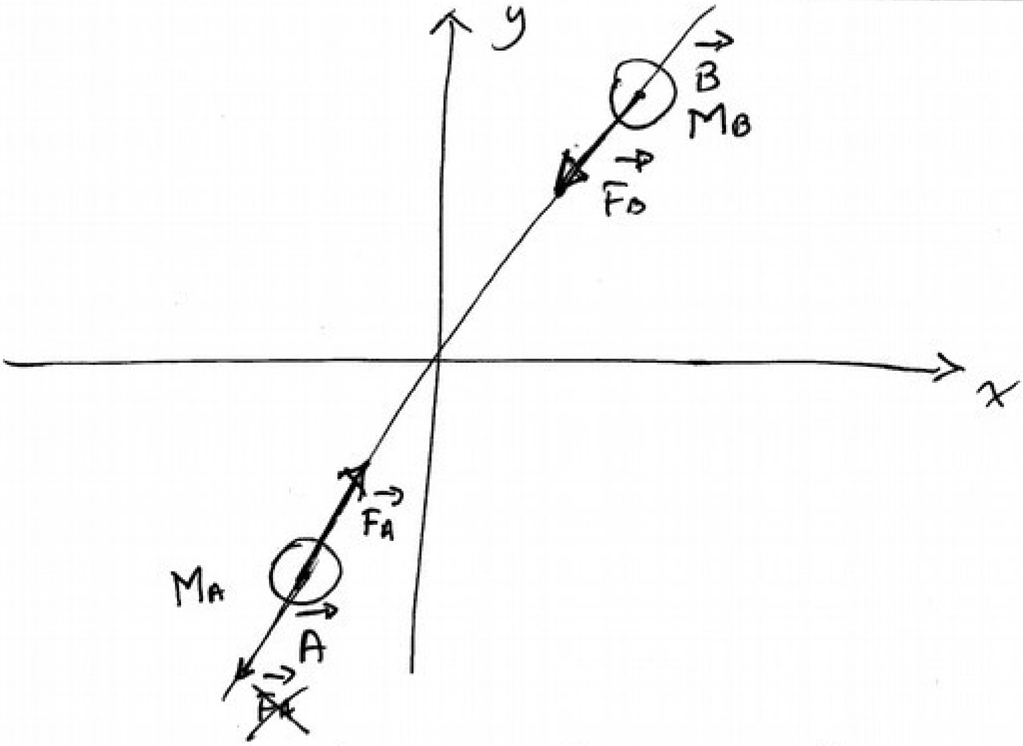
$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{e} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \qquad \theta = \frac{\pi}{4}.$$



$$\left.\begin{aligned} |\vec{F}| &= 5 \\ \theta &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}\right] \to \text{Rappresentazione geometrica (polare)}$$

$$\vec{F} = \underbrace{5}_{|\vec{F}|} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} \end{bmatrix}}_{\vec{e}}$$



1) Modulo della forza di gravità

$$|\vec{F}| = G \frac{M_A \cdot M_B}{|AB|^2}.$$

$$\vec{F} = |\vec{F}| \cdot \vec{e}$$

2) Direzione della forza di gravità
$\equiv$ retta che congiunge i
2 corpi celesti.

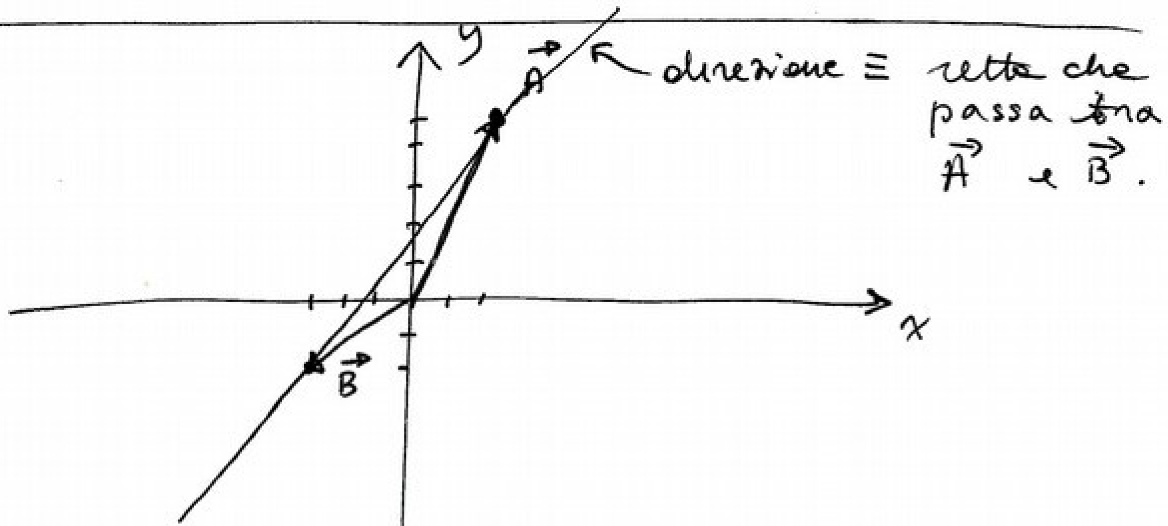
3) Verso: la forza tira verso l'altro pianeta.

4) Punto di applicazione: COM del pianeta.

Si considerino 2 pianeti, posizionati nello spazio secondo i seguenti vettori:

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Siano M_A ed M_B le masse dei 2 pianeti.
Scrivere in forma vettoriale le forze che agiscono su entrambi i pianeti.



$$|\vec{F_A}| = |\vec{F_B}| = G \frac{M_A M_B}{|AB|^2}$$

$$|AB| = |\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{\underbrace{(2-(-3))}_{x}^2 + \underbrace{(5-(-2))}_{y}^2} =$$

$$= \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}.$$

$$|\vec{F_A}| = |\vec{F_B}| = \frac{G M_A M_B}{(\sqrt{74})^2} = \frac{G M_A M_B}{74}.$$

$$\vec{F}_A = |\vec{F}_A| \cdot \underbrace{\vec{e}_{AB}}_{\text{versore da } \vec{A} \text{ a } \vec{B}}$$

$$\vec{F}_B = |\vec{F}_B| \cdot \underbrace{\vec{e}_{BA}}_{\text{versore da } \vec{B} \text{ ad } \vec{A}}.$$

$$\boxed{\vec{e}_{AB} = -\vec{e}_{BA}}$$

$$\boxed{\vec{e}_{AB} = \frac{\vec{e}\,'_{AB}}{|\vec{e}\,'_{AB}|}, \quad \vec{e}\,'_{AB} = \vec{B} - \vec{A}}$$

$$\boxed{\vec{e}_{BA} = \frac{\vec{e}\,'_{BA}}{|\vec{e}\,'_{BA}|}, \quad \vec{e}\,'_{BA} = \vec{A} - \vec{B}}$$

$$\vec{e}\,'_{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$|\vec{e}\,'_{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + (-7)^2} = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}.$$

$$|\vec{e}\,'_{AB}| = |AB|$$

$$|\vec{e}\,'_{BA}| = \ldots = \sqrt{74} = |AB|$$

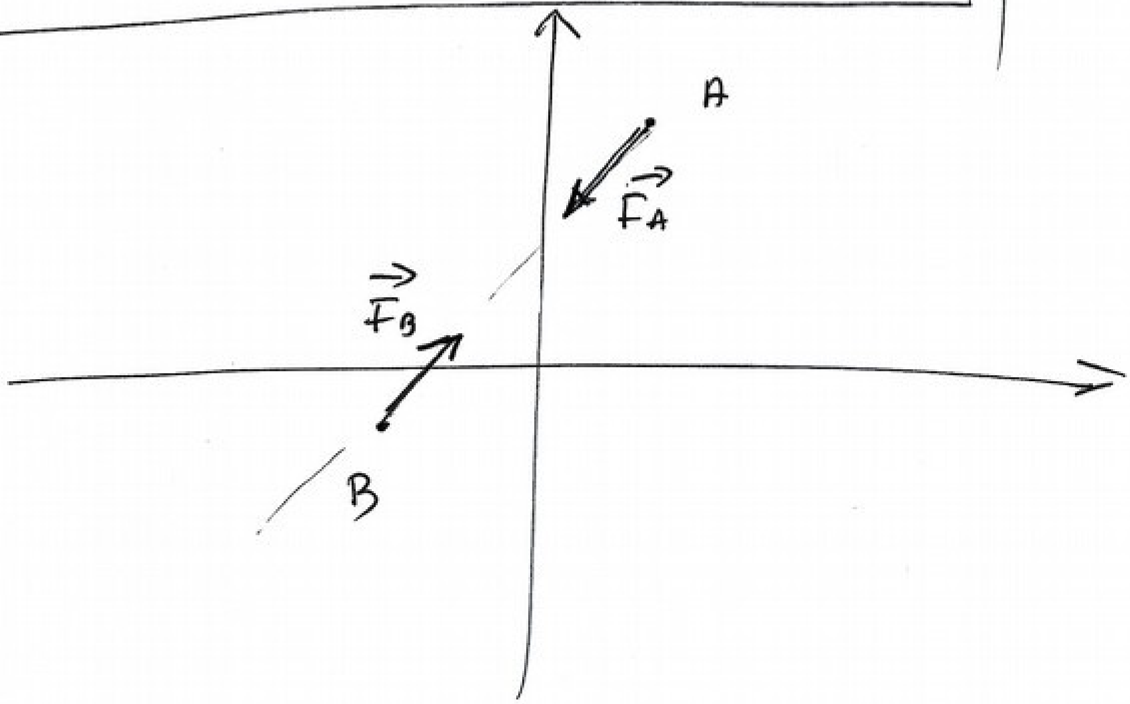
$$\left.\begin{aligned} \vec{e}\,'_{AB} &= \vec{B} - \vec{A} \\ \vec{e}\,'_{BA} &= \vec{A} - \vec{B} \end{aligned}\right\} \Rightarrow |\vec{e}\,'_{AB}| = |\vec{e}\,'_{BA}| = |AB|$$

$$\vec{e}_{AB} = \frac{1}{\sqrt{74}} \begin{bmatrix} -5 \\ -7 \end{bmatrix} \qquad \vec{e}_{BA} = \frac{1}{\sqrt{74}} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

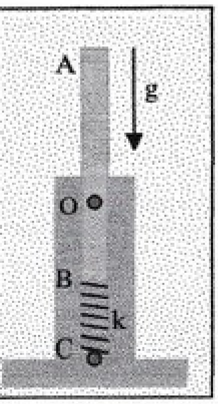
$$\vec{F}_A = \frac{G M_A M_B}{74} \cdot \frac{1}{\sqrt{74}} \begin{bmatrix} -5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\vec{F}_B = \frac{G M_A M_B}{74} \cdot \frac{1}{\sqrt{74}} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B$$

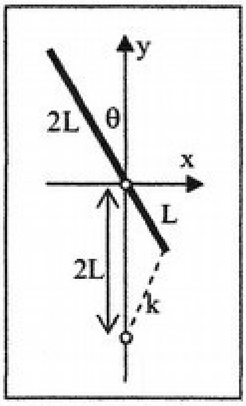


Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 24 Gennaio 2020



Problema 2

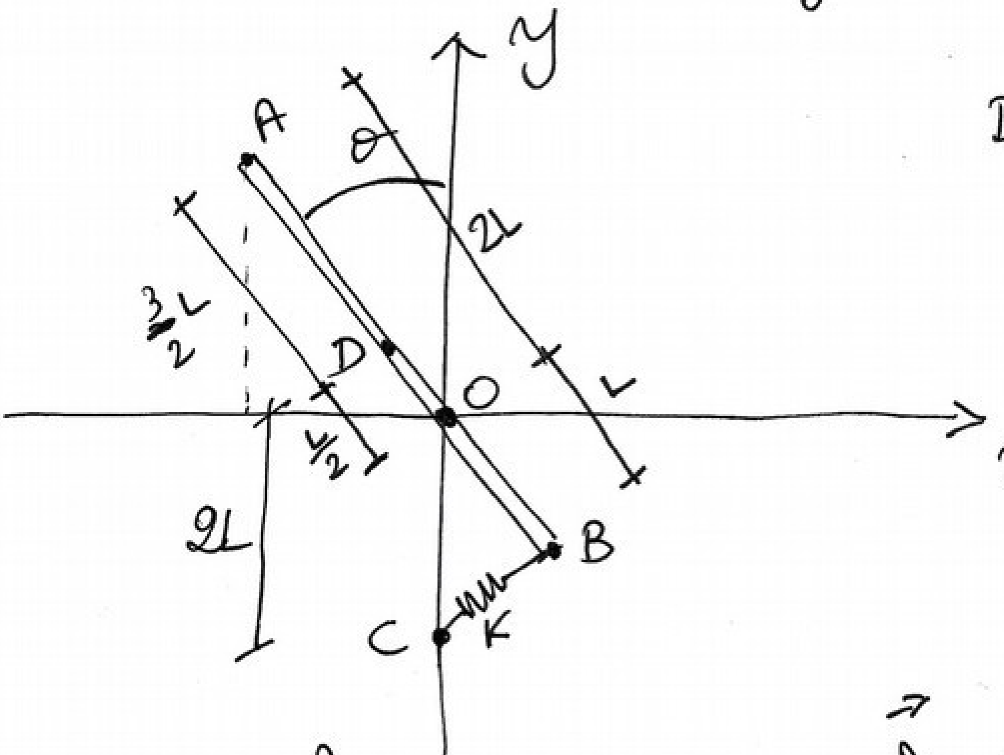
Una sbarretta AB di lunghezza 3L e massa M è imperniata in O ad un asse orizzontale. Il perno è a distanza L da B. Una molla di costante elastica k e lunghezza trascurabile ha un estremo fissato a B e l'altro al punto C, che è a distanza 2L sotto il fulcro O. Scrivere le coordinate cartesiane dell'estremo B e del centro di massa della sbarretta e l'energia potenziale totale del sistema in funzione dell'angolo θ che la sbarretta forma con la verticale. Per quali valori di k la posizione verticale della sbarretta è di equilibrio stabile? [redacted]

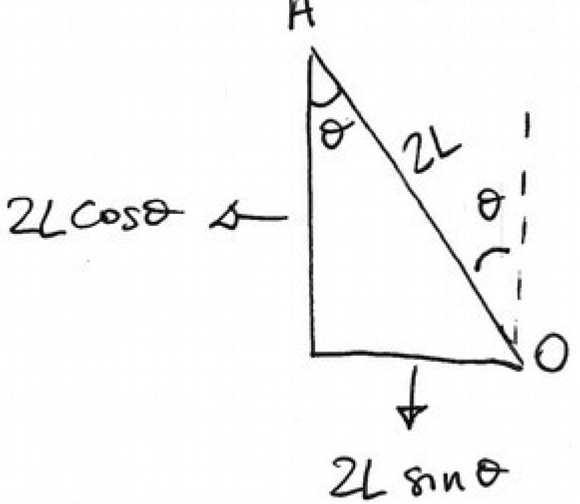


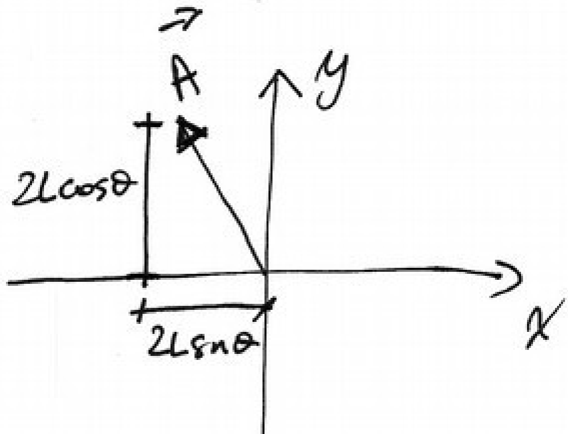
In $\mathbb{R}^2$ Vettori $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$

θ

D ≡ centro di massa

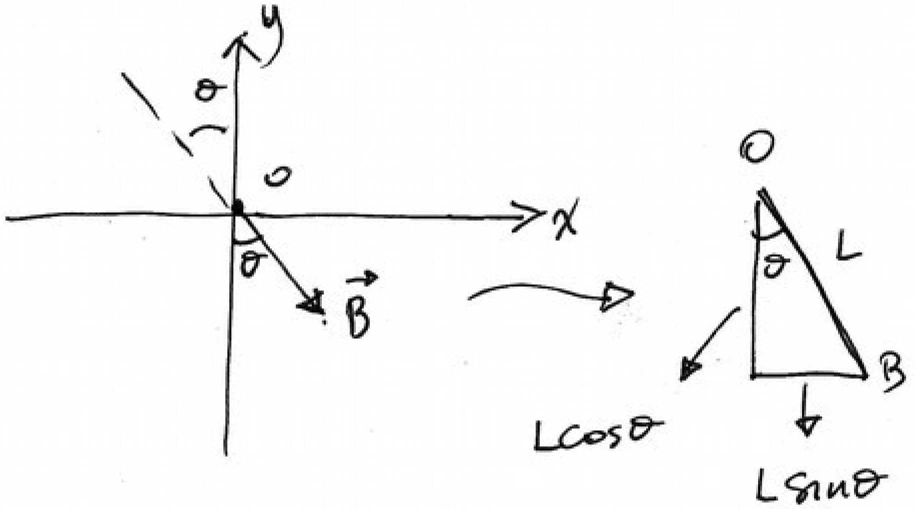






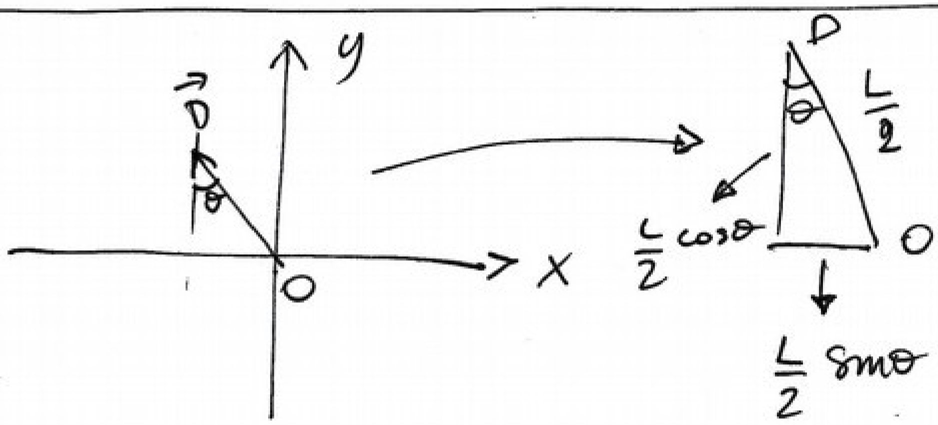
$$\vec{A} = \begin{bmatrix} -2L\sin\theta \\ 2L\cos\theta \end{bmatrix}.$$

$\vec{B}$



$$\vec{B} = \begin{bmatrix} L\sin\theta \\ -L\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\vec{O} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2L \end{bmatrix}$$

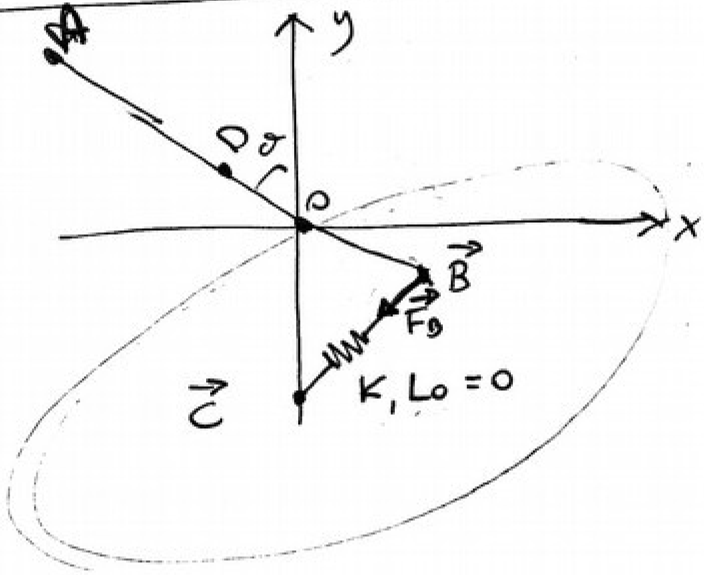


$$\vec{D} = \begin{bmatrix} -\frac{L}{2}\sin\theta \\ \frac{L}{2}\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} -2L\sin\theta \\ 2L\cos\theta \end{bmatrix} \qquad \vec{B} = \begin{bmatrix} L\sin\theta \\ -L\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\vec{O} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2L \end{bmatrix}$$

$$\vec{D} = \begin{bmatrix} -\frac{L}{2}\sin\theta \\ \frac{L}{2}\cos\theta \end{bmatrix}$$

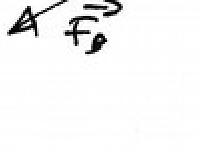


$\vec{F}_B$ è proporzionale al versore che và da $\vec{B}$ a $\vec{C}$.

$$\vec{e}'_{BC} = \vec{C} - \vec{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2L \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L\sin\theta \\ -L\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L\sin\theta \\ L(\cos\theta - 2) \end{bmatrix}$$

Oss. $\underline{-L\sin\theta < 0}$

$\underline{L(\cos\theta - 2) < 0}$



$$|\vec{\ell}'_{BC}| = \sqrt{(-L\sin\theta)^2 + (L(\cos\theta-2))^2}$$

$$= \sqrt{L^2\sin^2\theta + L^2\cos^2\theta + 4L^2 - 4L^2\cos\theta}$$

$$= \sqrt{L^2(\underbrace{\sin^2\theta + \cos^2\theta}_{1} + 4 - 4\cos\theta)}$$

$$= \sqrt{L^2(1+4-4\cos\theta)} =$$

$$= L\sqrt{5-4\cos\theta}\,.$$

$$\vec{\ell}_{BC} = \frac{\vec{\ell}'_{BC}}{|\vec{\ell}'_{BC}|} = \frac{1}{L\sqrt{5-4\cos\theta}}\begin{bmatrix} -L\sin\theta \\ L(\cos\theta-2) \end{bmatrix}$$

Versore da $\vec{B}$ a $\vec{C}$

FISICA

1) $|\vec{F}_B| = K\,|BC|$ Legge di Hook(e)

lunghezza della molla

$|\vec{F}_B| = k\,(|BC| - L_0)$ $(L_0 = 0)$

2) $\vec{F}_B = |\vec{F}_B| \cdot \vec{\ell}_{BC} = k|BC| \cdot \vec{\ell}_{BC}$

$\vec{F}_C = |\vec{F}_C| \cdot \vec{\ell}_{CB} = K|BC|(-\vec{\ell}_{BC}) = -\vec{F}_B$

$$\vec{F_B} = K\,|BC|\,\vec{e_{BC}}$$

$$= K\,|\vec{C}-\vec{B}|\cdot\vec{e_{BC}}$$

$$= K\,|\vec{e'_{BC}}|\cdot\vec{e_{BC}}$$

$$= K\,\cancel{L\sqrt{5-4\cos\theta}}\cdot\frac{1}{\cancel{L\sqrt{5-4\cos\theta}}}\begin{bmatrix}-L\sin\theta\\ L(\cos\theta-2)\end{bmatrix}$$

$$= K\begin{bmatrix}-L\sin\theta\\ L(\cos\theta-2)\end{bmatrix}.$$

$$\vec{F_B} = K\,(\vec{C}-\vec{B})$$

Se $\vec{C} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ $\quad\vec{B} = \begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}$

$$\vec{F_B} = K\begin{bmatrix}-x\\0\end{bmatrix} \rightsquigarrow \boxed{F_{Bx} = -Kx}$$

$$\boxed{\vec{F_B} = K\,|BC|\cdot\vec{e}_{BC}}$$

FISICA

$$U_k = \frac{1}{2} k \left(\underset{\substack{\text{lungh.}\\ \text{della}\\ \text{molla}\\ \text{(attuale)}}}{\underset{\uparrow}{|BC|}} - \underset{\substack{\text{lungh.}\\ \text{di riposo}\\ \text{della}\\ \text{molla } (L_0=0)}}{\underset{\uparrow}{L_0}} \right)^2$$

$$U_k = \frac{1}{2} k \, |BC|^2 = \frac{1}{2} k L^2 (5 - 4\cos\theta).$$

FISICA

$$U_g = Mg \cdot [\text{quota di } \vec{D}]$$

$$= Mg \, D_y$$

$$= Mg \frac{L}{2} \cos\theta.$$

FISICA

$$U = U_k + U_g$$

$$= \frac{1}{2} k L^2 (5 - 4\cos\theta) + Mg \frac{L}{2} \cos\theta.$$

La posizione ~~orizzontale~~ verticale è un equilibrio stabile?

1) $\theta^* = 0$ è la posizione verticale.

2) $\theta^* = 0$ è equilibrio se

$$U'(\theta^*) = 0$$ (ANALISI I)

3) θ^* è un equilibrio stabile se

$$U''(\theta^*) > 0$$

θ^* è un equilibrio instabile se

$$U''(\theta^*) < 0$$

θ^* è un equilibrio indifferente se

$$U''(\theta^*) = 0$$

$$U = \frac{1}{2} kL^2 (5 - 4\cos\theta) + \frac{MgL}{2} \cos\theta$$

$$U' = 2kL^2 \sin\theta - \frac{MgL}{2} \sin\theta$$

$$= \sin\theta \left(2kL^2 - \frac{MgL}{2}\right).$$

$$U'' = \cos\theta \left(2kL^2 - \frac{MgL}{2}\right).$$

Se $\theta^* = 0$ è equilibrio, allora

$$U'(0) = 0$$

$$U'(0) = \underbrace{\sin(0)}_{0} \left(2kL^2 - \frac{MgL}{2}\right) = 0$$

$$U''(0) = \underbrace{\cos(0)}_{1} \left(2kL^2 - \frac{MgL}{2}\right) = 2kL^2 - \frac{MgL}{2}$$

Per quali valori di $\underline{k}$ si ha che θ^* è equilibrio stabile.

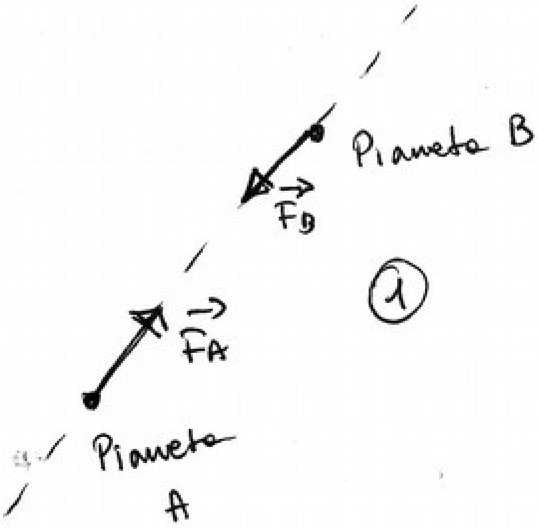
⟹ Si assume che $M, L, g, \ldots$ ecc sono dati.

⟹ Cerco i k affinché $\underline{U''(0) > 0}$

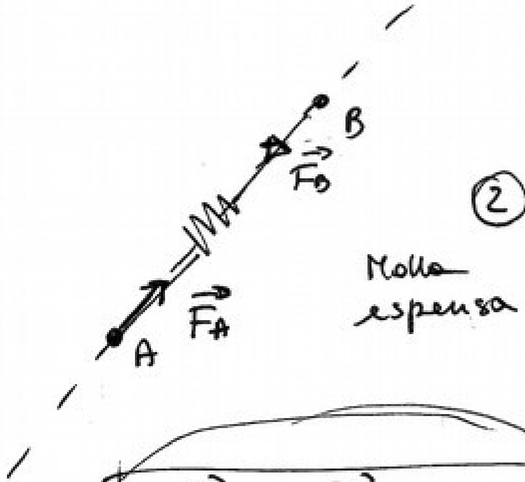
$$2kL^2 - \frac{MgL}{2} > 0$$

$$2kL^{\cancel{2}} > \frac{Mg\cancel{L}}{2}$$

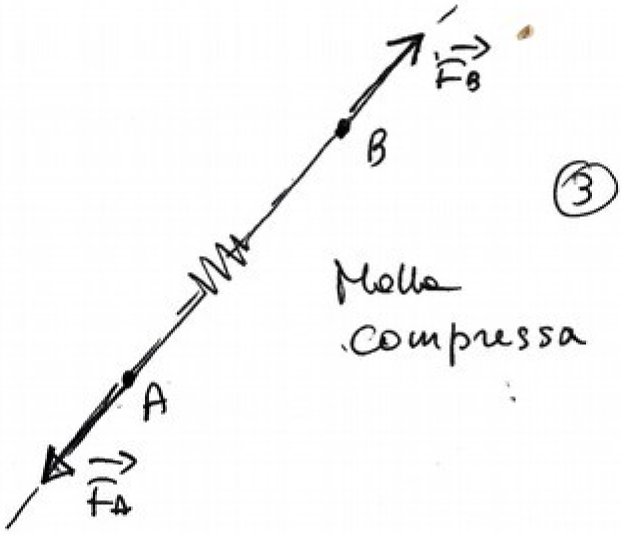
$$\boxed{k > \frac{Mg}{4L}}$$



$$\boxed{|\vec{F_A}| = |\vec{F_B}| = \frac{G M_A M_B}{|AB|^2}}$$



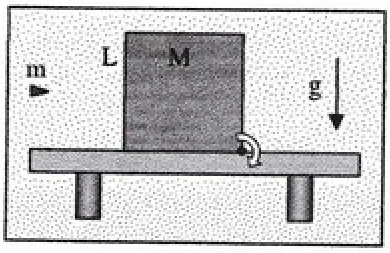
$$\boxed{|\vec{F_A}| = |\vec{F_B}| = K\,|AB|}$$



$$\left.\begin{aligned} \vec{F_A} &= |\vec{F_A}| \cdot \vec{e_{AB}} \\ \vec{F_B} &= |\vec{F_B}| \cdot \vec{e_{BA}} \end{aligned}\right] \quad 1,\ 2$$

$$\begin{aligned} \vec{F_A} &= -|\vec{F_A}| \cdot \vec{e_{AB}} = |\vec{F_A}| \cdot \vec{e_{BA}} \\ \vec{F_B} &= -|\vec{F_B}| \cdot \vec{e_{BA}} = |\vec{F_B}| \cdot \vec{e_{AB}} \end{aligned} \quad 3$$

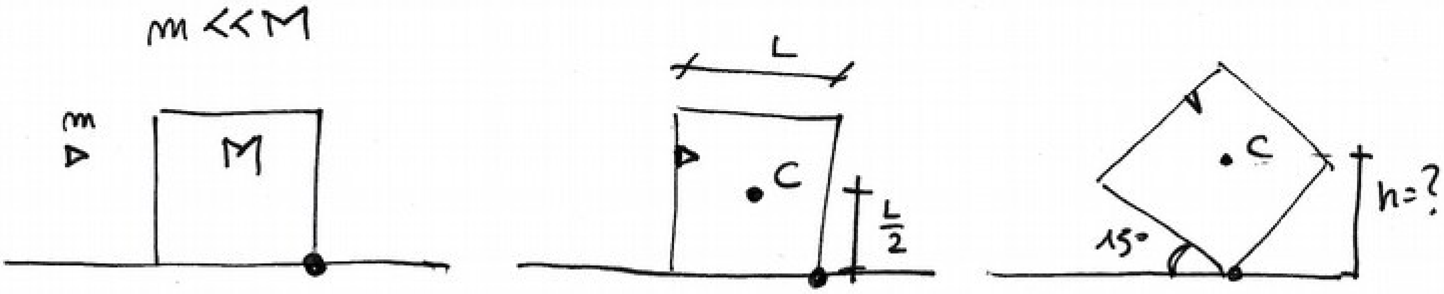
Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 9 Settembre 2016

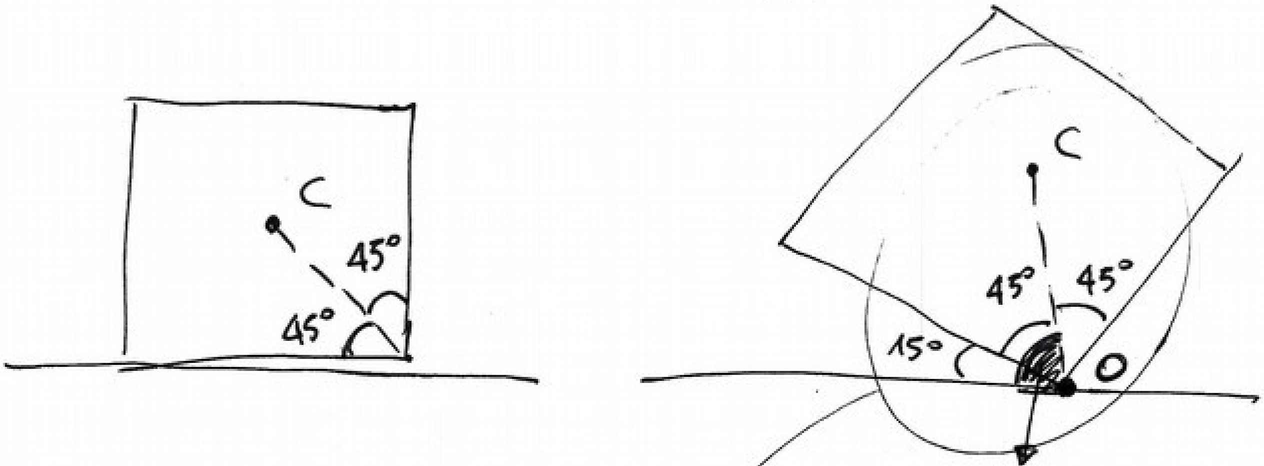


Esercizio 1

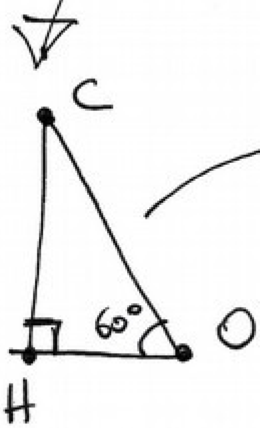
Un cubo omogeneo di massa M e lato L poggia con una faccia su un piano orizzontale ed è fermo. Esso può ruotare intorno a uno degli spigoli appoggiati sul piano, che è fisso. Un proiettile di massa m (con m<<M) giunge con velocità $\underline{\mathbf{v}}_0$ perpendicolare alla faccia opposta a quella soprastante il fulcro e si conficca nel suo centro.

Determinare la posizione del centro di massa quando il cubo si solleva di <u>15°</u>

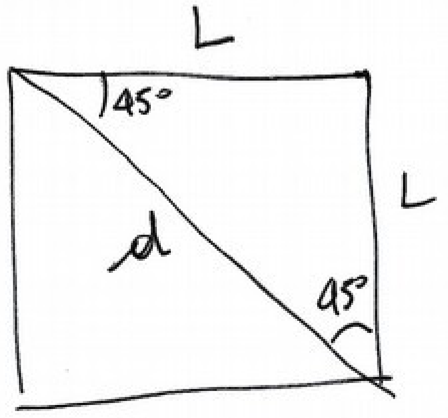




$15° + 45° = 60°$



$\overline{CO} = \dfrac{\text{diagonale del quadrato}}{2}$



$$L = d \sin 45°$$

$$\Rightarrow d = \frac{L}{\sin 45°}$$

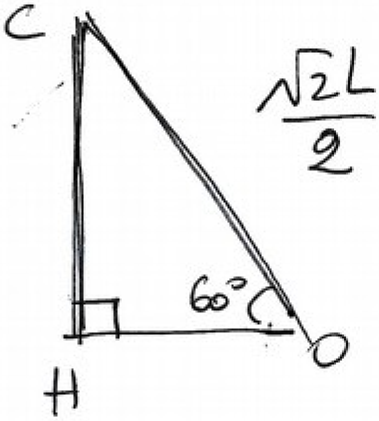
$$d = \frac{L}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} =$$

$$= L\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\cdot L.$$

$$d^2 = L^2 + L^2$$

$$d = \sqrt{2L^2}$$

$$d = L\sqrt{2}$$



$$\frac{\sqrt{2}L}{2} = \frac{d}{2}$$

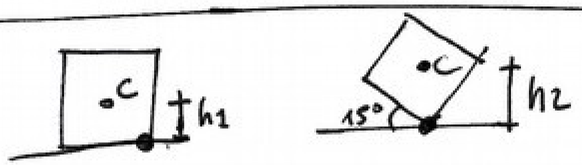
Errata corrige

$$\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{CH} = \frac{\sqrt{2}L}{2} \sin 60°$$

$$= \frac{\sqrt{2}L}{2} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}L}$$

ΔU

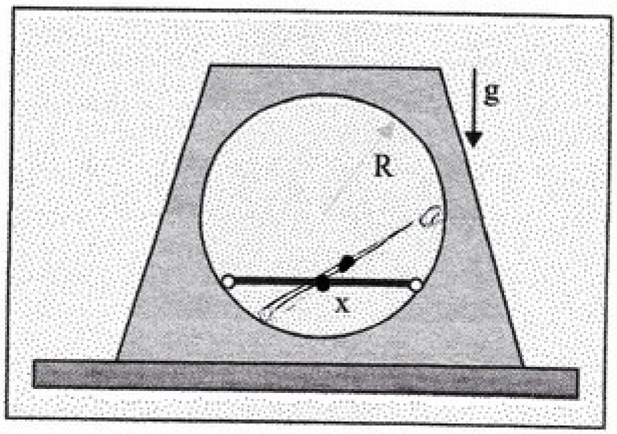


$$\Delta U = Mg(h_2 - h_1) = Mg\left(\frac{\sqrt{2}}{4}L - \frac{L}{2}\right) = \ldots$$

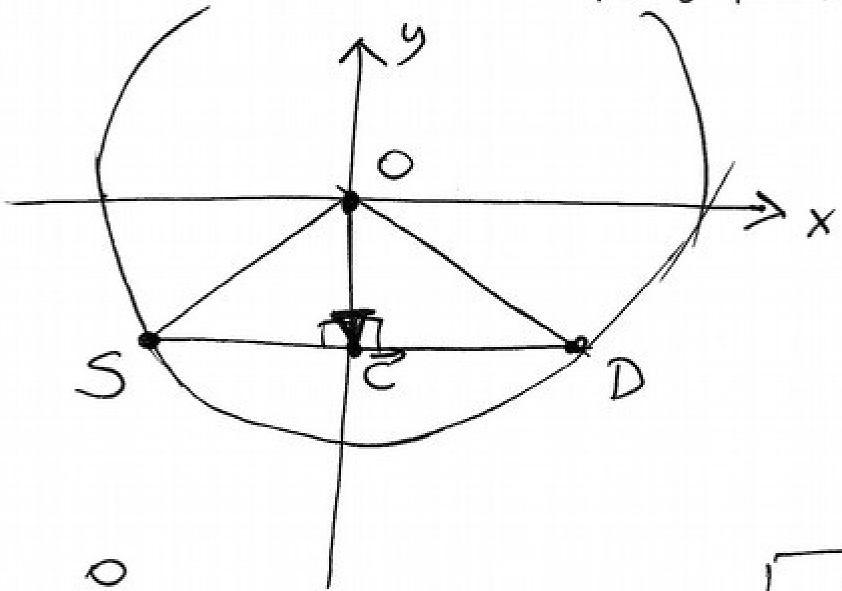
Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 13 Febbraio 2020

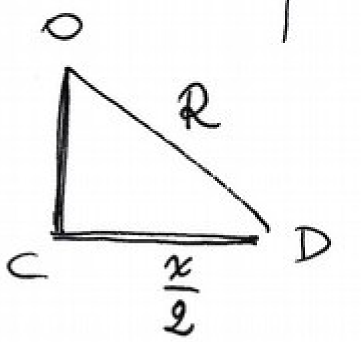
Problema 1

Si ha una guida circolare liscia di raggio R su un piano verticale. Dentro la guida, con gli estremi su di essa, può muoversi una sbarretta omogenea di lunghezza x e densità omogenea λ. Qual è l'energia cinetica della sbarretta, se il suo centro di massa ha velocità V? Se la sbarretta compie piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio, qual è il periodo di tali oscillazioni?



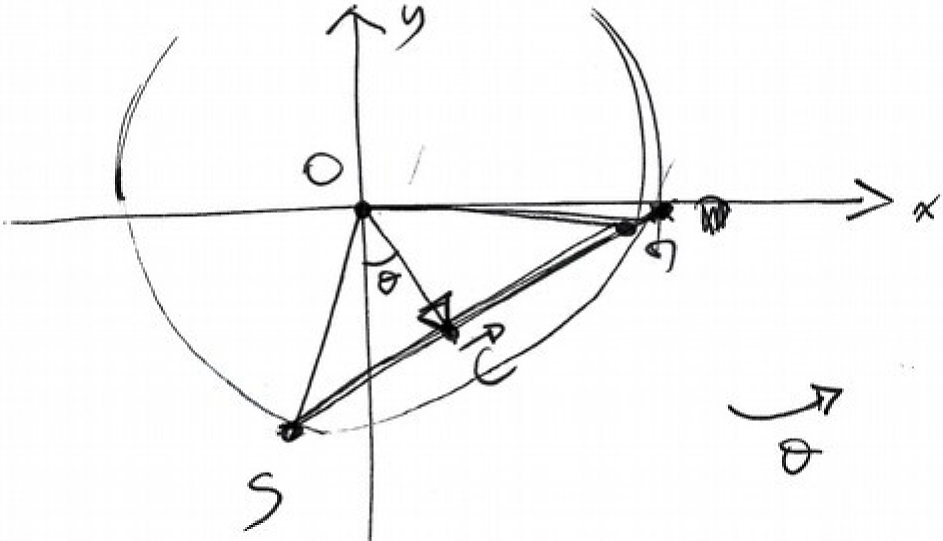
Determinare la posizione del centro di massa per ogni possibile angolo

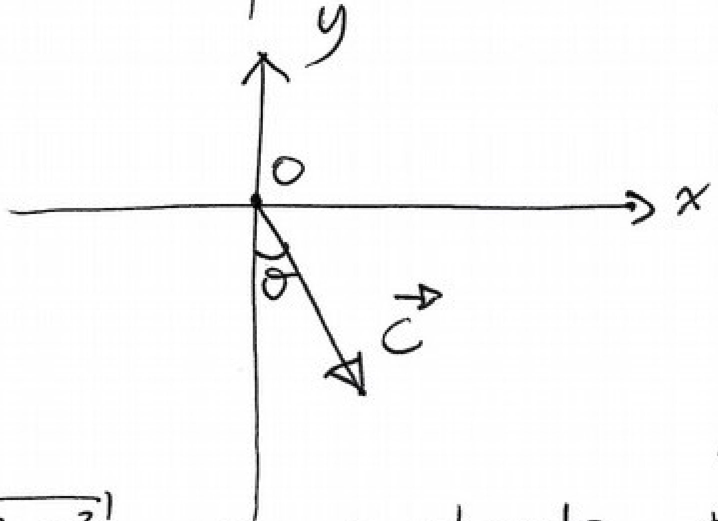




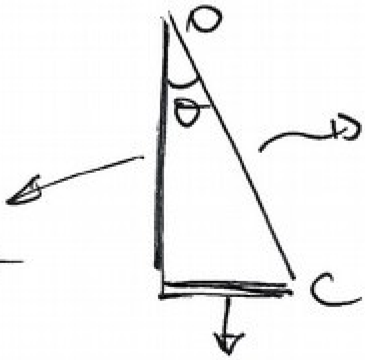
$$\overline{OC} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$$

$$\vec{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} \end{bmatrix}$$





$\overline{OC} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$ è costante per ogni θ!



$\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$

$\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}\cos\theta$

$\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} \cdot \sin\theta$

$$\hookrightarrow \vec{C} = \begin{bmatrix} \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}\,\sin\theta \\ -\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}\,\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\vec{C}(\theta) = \underbrace{\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}}_{|\vec{C}(\theta)|} \underbrace{\begin{bmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \\ \end{bmatrix}}_{\vec{e}(\theta)}$$

Noto $\vec{C}$

Posso calcolare la U del sistema.

E-MAIL

madeo@diism.unisi.it
madeo@dii.unisi.it