Corso di recupero di Fisica 2018/2019

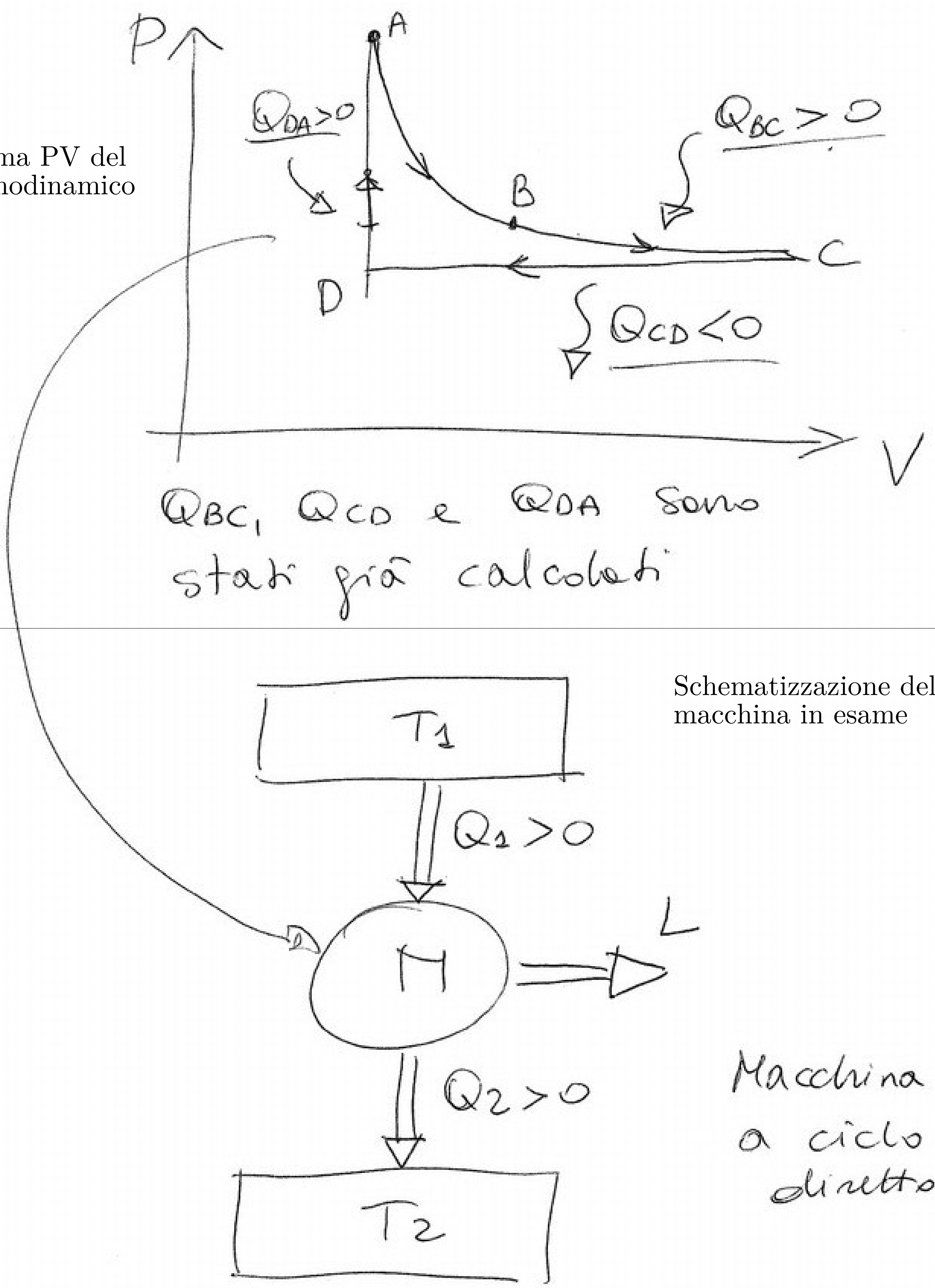
Dario Madeo

Lezione del 13/09/2019

madeo@dii.unisi.it
http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1819.html

Conclusione dell'esercizio 4 dell'esame di Fisica 1 dell'8 Luglio 2019.

Diagramma PV del ciclo termodinamico



Schematizzazione della macchina in esame

OCCHIO AI SEGNI!

Dal punto di vista della macchina M:
Q_1: calore assorbito
$-Q_2$: calore ceduto

Dal punto di vista del termostato T_1:
$-Q_1$: calore ceduto

Dal punto di vista del termostato T_2:
Q_2: calore assorbito

$$\Delta S_u = \Delta S_M + \Delta S_1 + \Delta S_2$$

$$= 0 + \Delta S_1 + \Delta S_2$$

$$= -\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}$$

$$\Delta S_u = \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1}$$

Come scelgo T_1 e T_2 affinché ΔS_u sia minimo?

$$\boxed{\min_{T_1, T_2} \Delta S_u}$$

$$Q_1 = Q_{BC} + Q_{DA} = (\text{numero} > 0)$$

$$Q_2 = -Q_{CD} = (\text{numero} > 0)$$

$\Delta S_u \geq 0$ → 2° principio della termodinamica

$T_1 \geq T_A$ → La temperatura massima del ciclo (T_A) deve essere minore del termostato "caldo" (T_1)

$T_2 \leq T_D$ → La temperatura minima del ciclo (T_D) deve essere maggiore del termostato "freddo" (T_2)

Queste disequazioni rappresentano i vincoli del problema di minimizzazione in esame.

$$\Delta S_U = \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1}$$

T_2 lo voglio grandissimo $\Rightarrow T_2 = T_D$

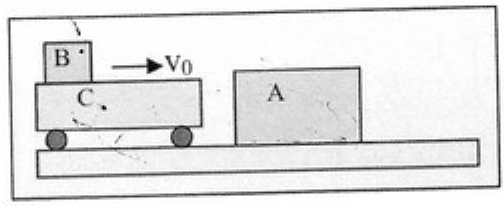
T_1 lo voglio piccolissimo $\Rightarrow T_1 = T_A$

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 2 Settembre 2019

Esercizio 1

Sopra un carrello C di massa 2M poggia un blocchetto B di massa M. Blocco e carrello si muovono insieme su un piano orizzontale con velocità iniziale v_0. Essi procedono fin quando a t=0, il carrello urta un blocco A di massa 4M, inizialmente fermo. L'urto è perfettamente anelastico e l'attrito del blocco sul piano comporta una forza frenante di un'assegnata intensità F_a (costante), la quale porta il sistema ad arrestarsi all'istante t_1. Proprio all'istante t_1, anche il blocchetto B cessa di strisciare sul carrello C. Dopo aver discusso in dettaglio sulle quantità conservate nelle varie fasi, calcolare quanto vale t_1; quanta energia viene dissipata nell'urto, quanta per attrito con il piano e quanta per attrito fra blocchetto e carrello.

[Per uniformità di notazione, utilizzare opportunamente le lettere A, B e C: per esempio, indicare con p_{AC} la quantità di moto del sistema costituito da carrello e blocco, con K_{BC} l'energia cinetica di carrello e blocchetto ecc.]



$V_A^0 = 0$

$V_B^0 = V_0$

$V_C^0 = V_0$

$4M \cdot 0 + M \cdot V_0 + 2M \cdot V_0 = 3MV_0$

$V_{AC}^1 = \frac{V_0}{3}$

$V_B^1 = V_0$

$6M \frac{V_0}{3} + MV_0 = 3MV_0$

$V_{AC}^2 = 0$

$V_B^2 = 0$

t

$t_0 = 0$

urto anaelastico

t_1

il sys. si ferma.

A $t_0=0$ avviene un urto anaelastico che coinvolge i corpi A e C.
La quantità di moto del sistema A+C si conserva!

$$4M\, v_A^0 + 2M\, v_C^0 = 6M\, v_{AC}^1$$
$$4M \cdot 0 + 2M \cdot V_0 = 6M\, v_{AC}^1 \longrightarrow \boxed{v_{AC}^1 = \frac{V_0}{3}}$$

Poiché l'urto coinvolge A e C, solo su di essi si generano forze impulsive. Sul corpo B non si genera alcuna forza impulsiva. Quindi ~~anche~~ la ~~per lui si ha con~~ sua velocità non cambia.

$$\boxed{V_B^1 = V_B^0 = V_0}$$

Durante la seconda fase, agisce su tutto il sistema un'unica forza esterna: Fa.
Possiamo usare il teorema dell'impulso:

$$p_{ABC}^2 - p_{ABC}^1 = \int F_{EXT}\, dt$$

occhio alla direzione!

$$\left(M \cdot v_B^2 + 6M \cdot v_{AC}^2\right) - \left(M \cdot v_B^1 + 6M \cdot v_{AC}^1\right) = \int_0^{t_1} (-Fa)\, dt$$

$$0 + 0 \quad - MV_0 - 6M\frac{V_0}{3} = -Fa\, t_1$$

$$3MV_0 = Fa\, t_1 \rightsquigarrow \boxed{t_1 = \frac{3MV_0}{Fa}}$$

Energia bruciata nell'urto (A, C)

$$\left(\frac{1}{2}2M V_0^2\right) - \left(\frac{1}{2}6M\left(\frac{V_0}{3}\right)^2\right) =$$

prima (solo ~~C~~)

dopo (A+C)

$$= MV_0^2 - \frac{MV_0^2}{3} = \frac{2}{3}MV_0^2.$$

Energia bruciata dall'attrito con il pavimento

$$\left(\frac{1}{2}6M\left(\frac{V_0}{3}\right)^2\right) - (0)$$

prima (A+C)

dopo (niente)

$$= \frac{MV_0^2}{3}.$$

Energia bruciata dall'attrito tra B e C.

$$\left(\frac{1}{2}MV_0^2\right) - (0)$$

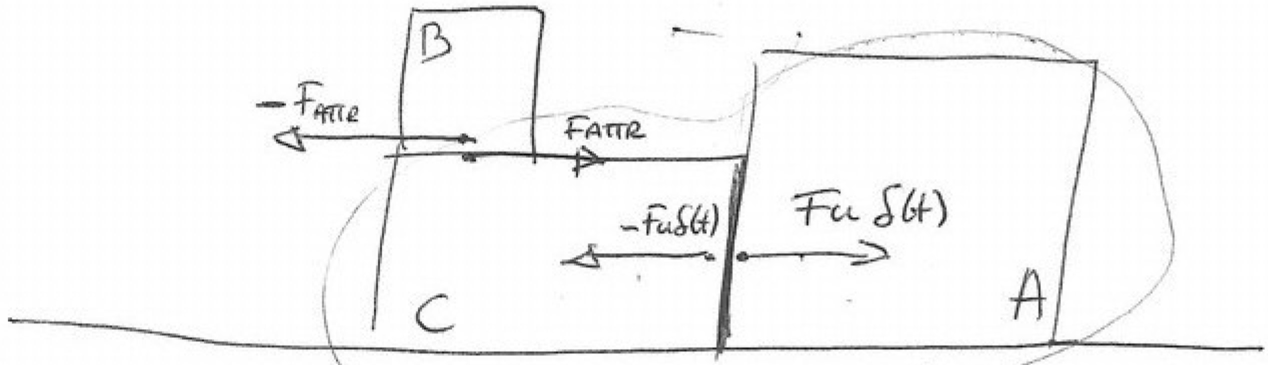
prima (solo B)

dopo (niente)

$$= \frac{1}{2} \cdot MV_0^2$$

Approccio alternativo usando il diagramma delle forze (impulsive)

@ $t = t_0 = 0$



$$\left.\begin{aligned} &A)\quad 4M\ddot{x}_A = F_u\delta(t) \\ &B)\quad M\ddot{x}_B = -F_{ATTR} \\ &C)\quad 2M\ddot{x}_C = -F_u\delta(t) + F_{ATTR} \end{aligned}\right\} \int_{0^-}^{0^+} \dots \, dt$$

$$A)\quad 4M\left(\dot{x}_A^+ - \dot{x}_A^-\right) = F_u$$

$$B)\quad M\left(\dot{x}_B^+ - \dot{x}_B^-\right) = 0$$

$$C)\quad 2M\left(\dot{x}_C^+ - \dot{x}_C^-\right) = -F_u$$

Ricorda le proprietà della delta...

$$\boxed{\int_{0^-}^{0^+} A\,\delta(t)\,dt = A}$$

Forza impulsiva

$$\boxed{\int_{0^-}^{0^+} A\,dt = 0}$$

Forza non impulsiva

$$\int_{0^-}^{0^+} \ddot{x}\,dx = \dot{x}(0^+) - \dot{x}(0^-)$$

B) $\dot{x}_B^+ = \dot{x}_B^-$

$$\Rightarrow \quad V_B^1 = V_0$$

La velocità di B non è cambiata poichè non è stato coinvolto nell'urto.

A) $4M(V_{AC}^1 - 0) = F_u$

C) $2M(V_{AC}^1 - V_0) = -F_u$

$$4M V_{AC}^1 = -2M(V_{AC}^1 - V_0)$$

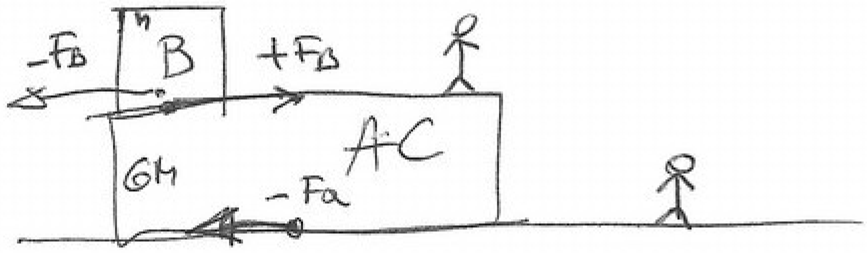
$$\boxed{6M V_{AC}^1 = 2M V_0}$$

Abbiamo "scoperto" perchè la quantità di moto di A+C si conserva!!!

$$P^0 = P^1$$

$$\underbrace{2M V_0}_{C} = \underbrace{6M V_{AC}^1}_{AC}$$

$$\boxed{V_{AC}^1 = \frac{V_0}{3}}$$



$$\begin{cases} M\ddot{x}_B = -F_B \\ 6M\ddot{x}_{AC} = +F_B - F_a \end{cases}$$

$$6M\ddot{x}_{AC} = -M\ddot{x}_B - F_a$$

$$\frac{6M\ddot{x}_{AC} + M\ddot{x}_B}{7M} = -\frac{F_a}{7M}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_{CDM} = -\dfrac{F_a}{7M} \\ \dot{x}_{CDM}(0) = \dfrac{Mv_0 + 6M\frac{v_0}{3}}{7M} \\ \dot{x}_{CDM}(t_1) = 0 \end{cases} \quad \frac{Mv_0}{M}\left(\frac{1+2}{7}\right)$$

$$x_{CDM} = \cancel{x_0} + \cancel{v_0}t + \frac{1}{2}at^2$$

$$X_{CDM}(t) = X_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$0 + \frac{3}{7} V_0 t - \frac{1}{2} \frac{F_a}{7M} t^2$$

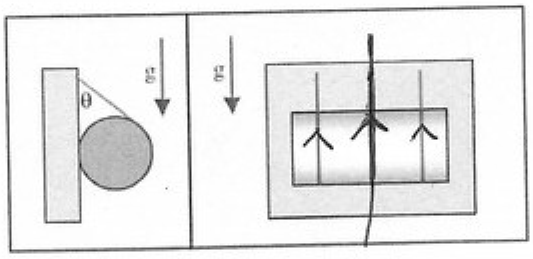
$$V_{CDM}(t) = \frac{3}{7} V_0 - \frac{F_a}{7M} t$$

$$V_{CDM}(0) = \frac{3}{7} V_0$$

$$V_{CDM}(t_1) = \frac{3}{7} V_0 - \frac{F_a}{7M} t_1 = 0$$

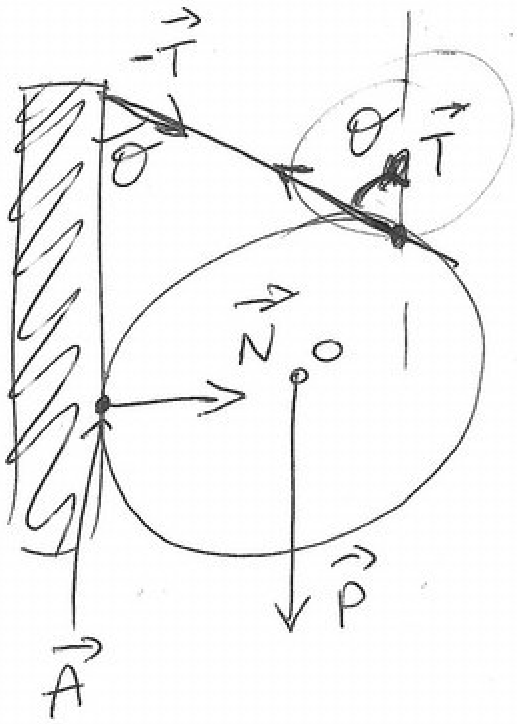
$$t_1 = \frac{3 M V_0}{F_a}$$

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 2 Settembre 2019



Esercizio 2

Un cilindro omogeneo di raggio R e massa M ha l'asse diretti orizzontalmente e poggia su un piano verticale con il quale interagisce con una forza di attrito statico di coefficiente μ_S. Il cilindro viene tenuto fermo con due corde avvolte su di esso, aventi un'estremità fissata al piano. Stabilire la relazione fra la tensione T di ciascuna corda e l'angolo θ che le corde formano con il piano. Inoltre stabilire i possibili valori di θ, sapendo che $\mu_S=0.8$.



$$\vec{T} = T\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ +\cos\theta \end{bmatrix}$$

$T > 0$

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \end{bmatrix}$$

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix}$$

$A \in \mathbb{R}$

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} N \\ 0 \end{bmatrix}$$

$N > 0$

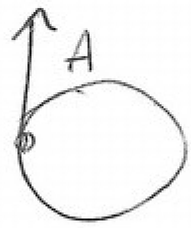
T, A, N

$$M\ddot{x} = -T\sin\theta + N = 0$$

$$M\ddot{y} = T\cos\theta - Mg + A = 0$$

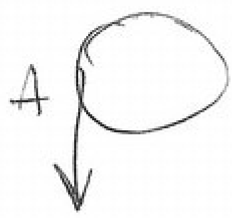
$$I_0\ddot{\theta} = +TR - AR = 0$$

Caso 1



$A>0 \Rightarrow T<0$

Caso 2



$A<0 \Rightarrow T>0$

$$\begin{cases} -T\sin\theta + N = 0 \\ T\cos\theta - Mg + A = 0 \\ TR - AR = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = T\sin\theta \\ A = Mg - T\cos\theta \\ T = A \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = T\sin\theta \\ T = Mg - T\cos\theta \\ T = A \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = \dfrac{Mg\sin\theta}{1+\cos\theta} \\ T = \dfrac{Mg}{1+\cos\theta} \\ A = \dfrac{Mg}{1+\cos\theta} \end{cases}$$

Tensione di una fune

$$\frac{T}{2} = \frac{Mg}{2(1+\cos\theta)}$$

$$A = \frac{Mg}{1+\cos\theta}$$

$$A \leq \mu_s N$$

$$\frac{\cancel{Mg}}{\cancel{1+\cos\theta}} \leq 0.8 \cdot \frac{\cancel{Mg}\sin\theta}{\cancel{1+\cos\theta}}$$

$$1 \leq 0.8 \cdot \sin\theta$$

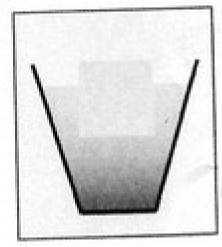
$$\sin\theta \geq \frac{1}{0.8} > 1 \Rightarrow \underline{\text{impossible}}$$

$$\frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{5}{4} = 1.25$$

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 2 Settembre 2019

Esercizio 3

Un recipiente contiene un liquido non omogeneo: la densità del liquido dipende dalla profondità z secondo la relazione $\rho(z)=\rho_0(1+z/L)$. Un cubo di lato L e densità omogenea ρ_0 galleggia sul liquido. Indicando con p_0 la pressione atmosferica, stabilire il valore della pressione a una generica profondità z. Inoltre, stabilire quale frazione del cubo è immersa (cioè a quale profondità sta la sua faccia inferiore).



Legge di Stevino in versione integrale

$$p(z) = p_0 + \int_0^z \rho(h) g \, dh$$

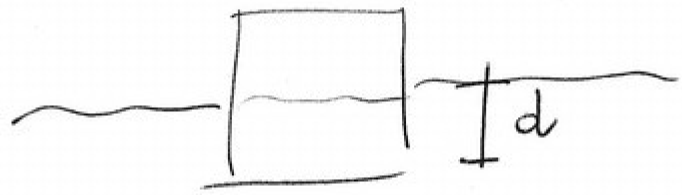
$$= p_0 + \int_0^z \rho_0 \left(1 + \frac{h}{L}\right) g \, dh$$

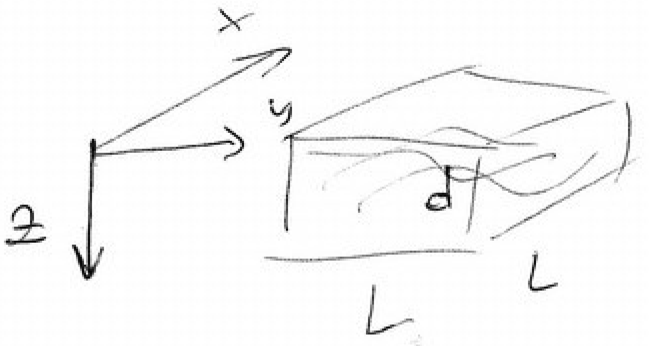
$$= \ldots$$

Cubo

$$V_c = L^3$$

$$M_c = \rho_0 L^3$$





$\longrightarrow M_L = ?$

$$M_L = \int dm = \iiint \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint \rho(z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iint dx\, dy \cdot \int \rho(z)\, dz$$

$$= L^2 \int_0^d \rho(z)\, dz$$

$$= L^2 \int_0^d \rho_0 \left(1 + \frac{z}{L}\right) dz$$

$$= L^2 \rho_0 \left[d + \frac{d^2}{2L} \right].$$

Massa liquido spostato.

Galleggia se $\quad M_L = M_C$

$$\cancel{L^2}\rho_0 \left[d + \frac{d^2}{2L} \right] = \cancel{\rho_0} L^{\cancel{3}}$$

$$d + \frac{d^2}{2L} = L$$

$$2Ld + d^2 = 2L^2$$

$$d^2 + 2Ld - 2L^2 = 0$$

$$d = \frac{-2L \pm \sqrt{4L^2 + 8L^2}}{2}$$

$$= \frac{-2L \pm L\sqrt{12}}{2}$$

$$= \frac{-2L + L2\sqrt{3}}{2} = L(\sqrt{3} - 1).$$

Frazione immersa

$$\frac{dL^2}{L^3} = \frac{d}{L} = \sqrt{3} - 1 \simeq 0.7$$

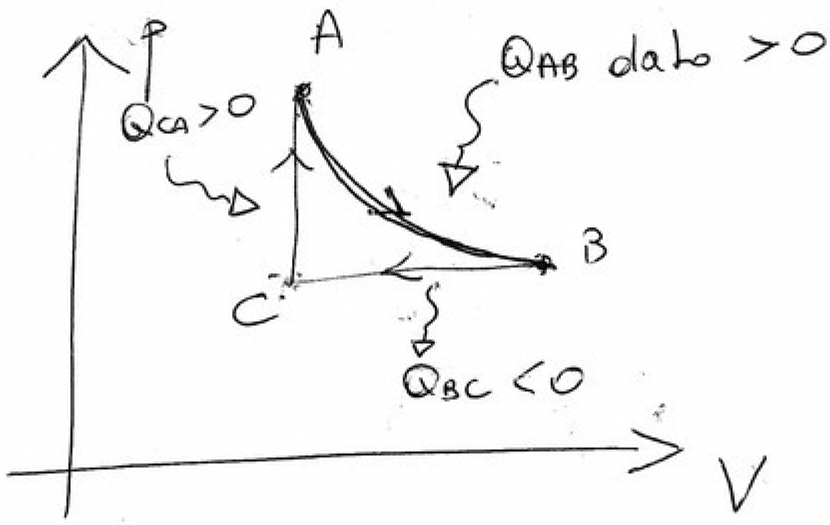
$\downarrow$

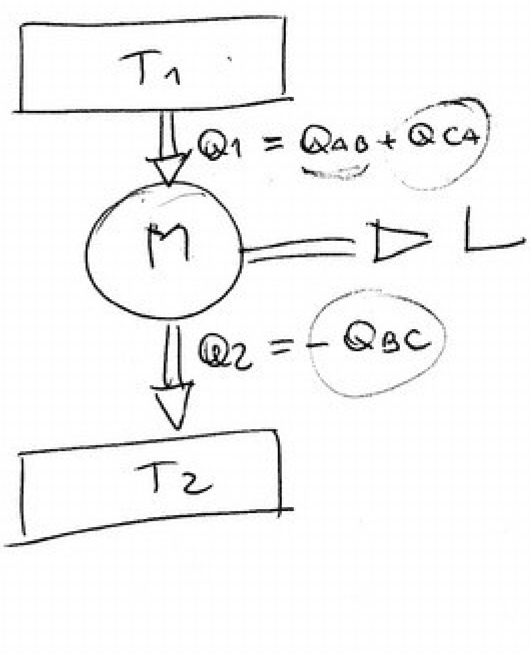
70% è immerso

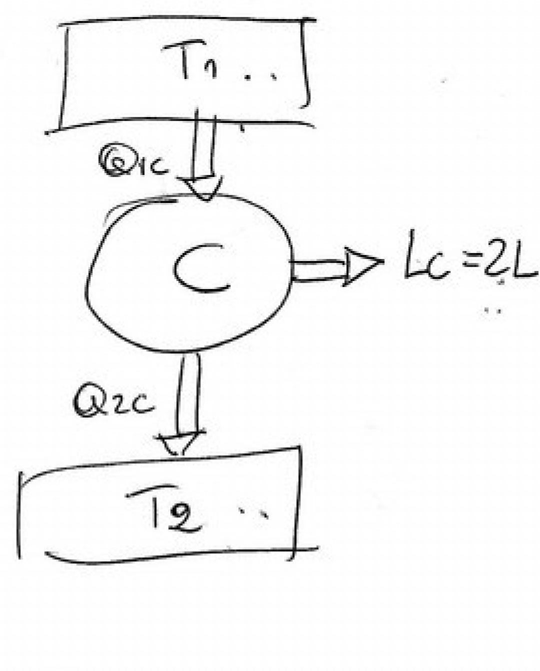
Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 2 Settembre 2019

Esercizio 4

Si hanno due termostati a temperatura T_1 e T_2, con $T_1=3T_2=600K$. Una macchina termica ciclica $\mathcal{M}$ produce lavoro scambiando calore con i due termostati. Essa è basata su un ciclo quasi-statico di una mole di gas perfetto biatomico, il quale ciclo è costituito da un'espansione isoterma in cui viene scambiata una quantità di calore Q_{AB} pari a 12kJ, una isobara e una isocora. Il lavoro prodotto da $\mathcal{M}$ in un ciclo è pari a metà di quello che produrrebbe una macchina di Carnot funzionante fra gli stessi termostati ed avente l'isoterma a temperatura superiore identica a quella della macchina $\mathcal{M}$. Qual è la temperatura minima raggiunta da $\mathcal{M}$? In un ciclo di $\mathcal{M}$, quanto aumenta l'entropia dell'universo?







Carnot

$$\eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{3T_2} = \frac{2}{3}$$

$$\eta_C = \frac{L_C}{Q_{1C}} \rightsquigarrow \frac{2}{3} = \frac{2L}{Q_{1C}}$$

$$\boxed{L = \frac{Q_{1C}}{3}}$$ lavoro macchina M.

$$Q_{1C} = Q_{AB}$$ (l'isoterma di Carnot a temperatura T_1 è uguale all'isoterma AB della macchina M)

$$\hookrightarrow \boxed{L = \frac{Q_{AB}}{3}}$$

Primo principio

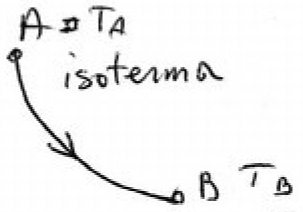
$$\Delta U = Q_1 - Q_2 - L \overset{\text{ciclo}}{=} 0$$

$$(Q_{AB} + Q_{CA}) - (-Q_{BC}) - \frac{Q_{AB}}{3} = 0$$

$$Q_{AB} + Q_{CA} + Q_{BC} - \frac{Q_{AB}}{3} = 0$$

$$\boxed{Q_{BC} + Q_{CA} = -\frac{2}{3} Q_{AB}}$$

ISOBARA



$T_A = T_B = T_1$

$$Q_{BC} = n\, C_p\, (T_C - T_B)$$

$$= \frac{7}{2} R\, (T_C - T_1)$$

ISOCORA

$$Q_{CA} = n\, C_V\, (T_A - T_C)$$

$$= \frac{5}{2} R\, (T_1 - T_C)$$

$$Q_{BC} + Q_{CA} = \frac{7}{2} R\, (T_C - T_1) + \frac{5}{2} R\, (T_1 - T_C)$$

$$= (T_C - T_1) \underbrace{\left(\frac{7}{2} R - \frac{5}{2} R\right)}_{C_P - C_V = R}$$

$$= (T_C - T_1)\, R$$

$$Q_{BC} + Q_{CA} = (T_C - T_1)\, R$$

$$Q_{BC} + Q_{CA} = -\frac{2}{3} Q_{AB}$$

$$\Rightarrow (T_C - T_1)\, R = -\frac{2}{3} Q_{AB}$$

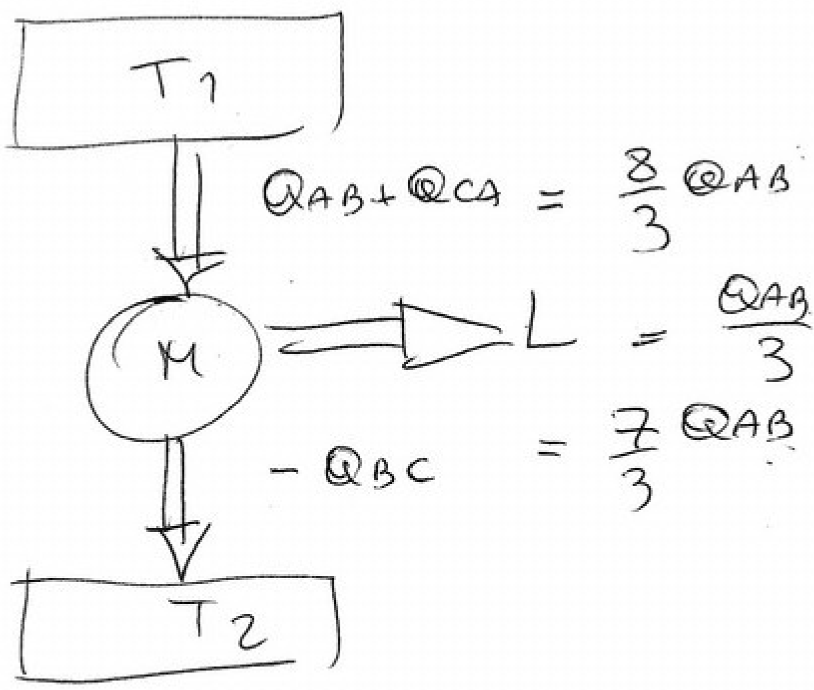
Temp. più bassa $\rightarrow$ $\boxed{T_C = T_1 - \frac{2\, Q_{AB}}{3R}}$

NOTO TC...

$$Q_{BC} = \dots \quad -\frac{7}{3} Q_{AB}$$

$$Q_{CA} = \dots \quad \frac{5}{3} Q_{AB}$$

$$Q_{AB} = \quad Q_{AB}$$



$$\Delta S_U = \underbrace{\frac{-\frac{8}{3} Q_{AB}}{T_1}}_{\Delta S_1} + \underbrace{\frac{\frac{7}{3} Q_{AB}}{T_2}}_{\Delta S_2} = \dots$$

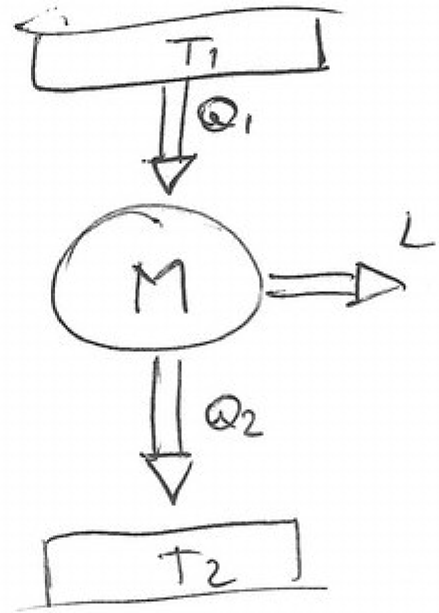
$T_1 = 600\,K$

$T_2 = 200\,K$

$T_1 = 3T_2$

$Q_1 > 0$

$Q_2 > 0$

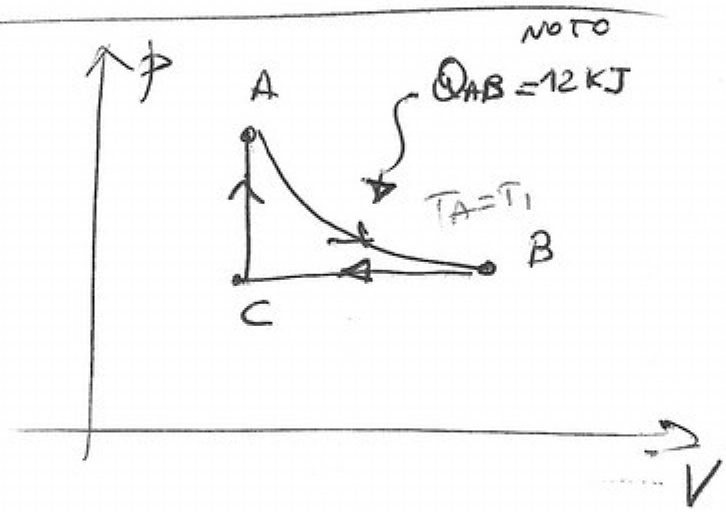


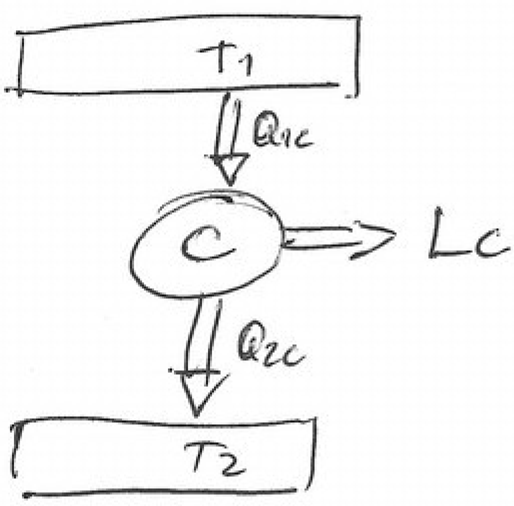
$$\Delta U = Q_1 - Q_2 - L = 0$$

$$L = Q_1 - Q_2 > 0 \quad \text{(lavoro prodotto)}$$

Biatomico

$$L = \frac{L_c}{9}$$





Carnot

$$\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{200}{600} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\eta_c = \frac{L_c}{Q_{1c}} = \frac{L_c}{Q_{AB}}$$

IDENTICO ALL'ISOTERMA DI M

$$\Rightarrow L_c = \frac{2}{3} Q_{AB}$$

$$\Rightarrow L = \frac{L_c}{2} = \frac{Q_{AB}}{3}$$

1° principio

$$L = Q_1 - Q_2$$

$$= (Q_{AB} + Q_{CA}) - (-Q_{BC})$$

$Q_{AB} > 0$
$Q_{CA} > 0$
$Q_{BC} < 0$

$$\frac{Q_{AB}}{3} = Q_{AB} + Q_{CA} + Q_{BC}$$

$$\frac{Q_{AB}}{3} - Q_{AB} = Q_{CA} + Q_{BC}$$

$$+\frac{2}{3} Q_{AB} = -Q_{BC} - Q_{CA}$$

NB
$$Q_{BC} = C_p (T_C - T_B) = C_p (T_C - T_A)$$
$$Q_{CA} = C_V (T_A - T_C)$$

$$\Rightarrow -Q_{BC} - Q_{CA} =$$

$$= -C_p(T_C - T_A) - C_V(T_A - T_C)$$

$$= C_p(T_A - T_C) - C_V(T_A - T_C)$$

$$= (T_A - T_C)\underbrace{(C_p - C_V)}_{R}$$

$$(T_A = T_1)$$

$$\hookrightarrow \frac{2}{3} Q_{AB} = (T_A - T_C) R$$

$$\frac{2 Q_{AB}}{3R} = T_A - T_C$$

$$\boxed{T_C = T_A - \frac{2}{3}\frac{Q_{AB}}{R}}$$ Temperatura minima raggiunta

$$T_C = 600 - \frac{2}{3} \cdot \frac{12 \cdot 10^3}{8.31}$$

$$= 600 - \frac{2}{3} \frac{12 \cdot 10^3}{8.31}$$

$$= 600 - 962.7$$

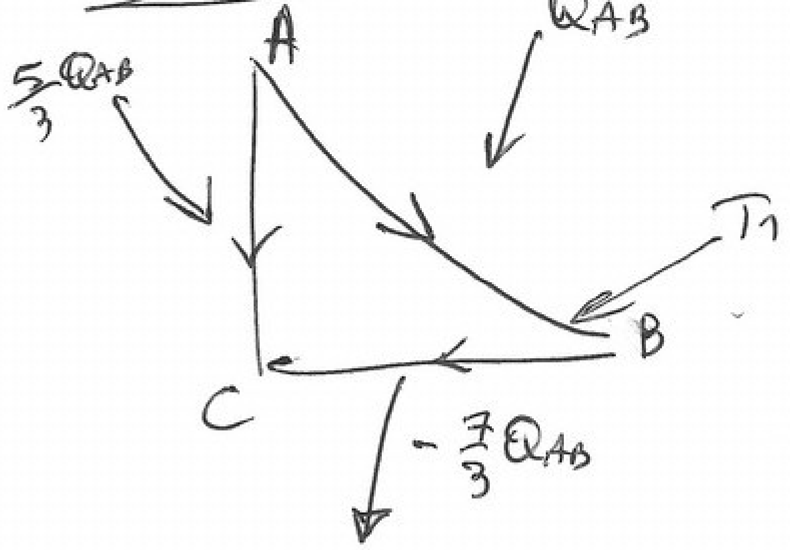
$$\hookrightarrow Q_{BC} = \frac{7}{2} R \left(\cancel{T_A} - \frac{2}{3}\frac{Q_{AB}}{R} - \cancel{T_A}\right)$$

$$= -\frac{7}{3} Q_{AB}$$

$$\hookrightarrow Q_{CA} = \frac{5}{2} R \left(T_A - T_A + \frac{2}{3}\frac{Q_{AB}}{R}\right)$$

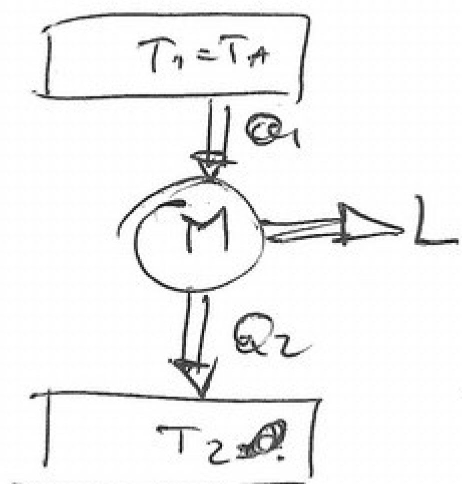
$$= \frac{5}{3} Q_{AB}.$$

Riepilogo



$$Q_1 = \frac{5}{3} Q_{AB} + Q_{AB} = \frac{8}{3} Q_{AB}$$

$$Q_2 = \frac{7}{3} Q_{AB}$$



$$\Delta S = \Delta S_M + \Delta S_1 + \Delta S_2$$

$$= 0 + \left(- \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \right) = \ldots$$